# 1 Espaces de Hilbert

## 1.1 Définition et exemples

Soit $H$ un espace vectoriel complexe et $(u, v)$ une fonction des variables $u, v \in H$ à valeurs complexes.

**Définition 1.1.** On dit que $(\cdot,\cdot)$ est un produit scalaire sur $H$ si les propriétés suivantes sont vérifiées pour tous $u, v, w \in H$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ :

$$(\lambda u, v) = \lambda(u, v), \quad (u + v, w) = (u, w) + (v, w), \quad (u, v) = \overline{(v, u)}, \tag{1.1}$$

$$(u, u) \geq 0, \quad (u, u) = 0 \text{ si et seulement si } u = 0. \tag{1.2}$$

Tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un *espace pré-hilbertien*.

**Lemme 1.2.** *Soit $H$ un espace pré-hilbertien avec le produit scalaire $(\cdot,\cdot)$. On note $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$. Alors pour tous $u, v \in H$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a*

$$|(u, v)| \leq \|u\| \, \|v\|, \tag{1.3}$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|. \tag{1.4}$$

*Démonstration.* Nous ne démontrons que les inégalités, car la deuxième relation dans (1.4) est évidente. Comme le produit scalaire est non négatif, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$0 \leq \|u + tv\|^2 = \|u\|^2 + 2t \operatorname{Re}(u, v) + t^2 \|v\|^2,$$

d'où on conclut que

$$|\operatorname{Re}(u, v)|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0.$$

En remplaçant dans cette inégalité $u$ par $e^{i\varphi} u$, où $\varphi \in \mathbb{R}$ est tel que $e^{i\varphi}(u, v) \in \mathbb{R}$, on obtient (1.3). Pour monter l'inégalité de (1.4), on utilise (1.3) :

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(u, v) \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \, \|v\| = \big(\|u\| + \|v\|\big)^2.$$

□

Dans la suite, une fonction non négative $\|\cdot\|$ définie sur un espace vectoriel et vérifiant (1.4) est appelée une *norme* sur $H$ si la relation $\|u\| = 0$ implique que $u = 0$. L'exercice suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une norme soit engendrée par un produit scalaire.

*Exercice* 1.3. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur un espace vectoriel $H$. Alors elle est engendrée par un produit scalaire si et seulement si

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad \text{pour tous } u, v \in H. \tag{1.5}$$

Cette relation est appelée l'*égalité de parallélogramme*.

*Exercice* 1.4. Montrer que le produit scalaire et la norme sont des fonctions continues. *Indication :* utiliser les inégalités (1.3) et (1.4).

*Exemples* 1.5. Les espaces suivants sont des espaces pré-hilbertiens :

1. l'espace $\ell$ des suites complexes $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\geq 1}$ dont les éléments sont nuls à partir d'un certain rang ; le produit scalaire est défini par
$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n \,;$$
2. l'espace $C([a,b])$ des fonctions continues $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ muni du produit scalaire
$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx \,;$$
3. l'espace $\mathcal{P}$ des polynômes $P(z)$ de la variables $z \in \mathbb{C}$ muni du produit scalaire
$$(P,Q) = \int_{|z|<1} P(z)\overline{Q(z)}\,dz \,.$$

Tout espace pré-hilbertien peut être considérer comme un espace métrique avec la distance $\|u - v\|$. Rappelons qu'un espace métrique est dit *complet* si toute suite de Cauchy possède une limite.

**Définition 1.6.** **(a)** Soit $H$ un espace pré-hilbertien. On dit que $H$ est un *espace de Hilbert* si il est complet par rapport à la métrique associée à la norme.

**(b)** Soit $H_0 \subset H$ un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert $H$. On dit que $H$ *est la complétion de* $H_0$ si pour tout élément $u \in H$ il existe une suite $\{u_n\} \subset H_0$ qui converge vers $u$, c'est-à-dire, $H_0$ est *dense* dans $H$.

*Exemples* 1.7. Les espaces de Hilbert suivants sont les complétions des espaces pré-hilbertiens considérés dans l'exemple 1.5 :

1. l'espace $\ell^2$ des suites complexes $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\geq 1}$ telles que
$$\|\boldsymbol{x}\|_{\ell^2} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} < \infty \,;$$
2. l'espace $L^2(a,b)$ des fonctions mesurables $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ telles que
$$\|f\|_{L^2(a,b)} := \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty \,;$$
3. l'espace $\mathcal{A}^2(D)$ (où $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$) des fonctions analytiques $f$ définies sur le disque $D$ telles que
$$\|f\|_{L^2(D)} := \left(\int_D |f(z)|^2 dz\right)^{1/2} < \infty \,.$$

*Exercice* 1.8. Ecrire les inégalités (1.3) et (1.4) dans le cas des espaces considérés dans l'exemple 1.7.

**Définition 1.9.** Un espace de Hilbert $H$ est dit *séparable* s'il existe une suite dense.

*Exercice* 1.10. Montrer que les espaces considérés dans l'exemple 1.7 sont séparables.

Dans la suite, nous n'allons considérer que des espaces de Hilbert séparables.

## 1.2 Opérateurs linéaires

Soient $H_1$, $H_2$ deux espaces de Hilbert. On note $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ l'espace d'opérateurs linéaires continus de $H_1$ dans $H_2$. Dans le case $H_1 = H_2$, on écrit $\mathcal{L}(H_1)$.

*Exercice* 1.11. Montrer qu'une application linéaire $A : H_1 \to H_2$ appartient à $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ si et seulement si

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} := \sup_{\|u\|_{H_1} \le 1} \|Au\|_{H_2} < \infty.$$

*Exercice* 1.12. Montrer que la fonction $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)}$ est une norme sur l'espace des applications linéaires continues et qu'elle peut être calculée par la formule

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} = \sup_{u,v} |(Au, v)_{H_2}|,$$

où la borne supérieure est prise par rapport aux vecteurs $u \in H_1$ et $v \in H_2$ de norme $\le 1$.

Le résultat suivant montre qu'un opérateur linéaire est uniquement défini par ses valeurs sur un sous-espace dense.

**Théorème 1.13.** *Soit $H_1, H_2$ deux espaces de Hilbert, $H_0 \subset H_1$ un sous-espace vectoriel dense, et $A_0 : H_0 \to H_2$ une application linéaire telle que*

$$\|A_0 u\|_{H_2} \le C \|u\|_{H_1} \quad \text{pour tout } u \in H_0. \tag{1.6}$$

*Alors il existe un unique opérateur $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ dont la restriction à $H_0$ est confondue avec $A_0$. De plus, la norme de $A$ est majorée par la constante $C$ de l'inégalité* (1.6).

*Idée de la démonstration.* On définit un opérateur $A : H_1 \to H_2$ par la formule

$$Au = \lim_{n\to\infty} A_0 u_n,$$

où $\{u_n\} \subset H_0$ est une suite quelconque telle que $u_n \to u$ quand $n \to \infty$. On vérifie facilement que l'opérateur $A$ est bien défini et linéaire. De plus, on a l'inégalité $\|Au\|_{H_2} \le C \|u\|_{H_1}$ pour tout $u \in H_1$, ce qui implique que la norme de $A$ est majorée par $C$. □

*Exercice* 1.14. Soit $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels et $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée continue. Peut-on affirmer que $f$ possède une extension continue à $\mathbb{R}$ ? Si non, trouver une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une telle extension.

*Exemple* 1.15. Soit $H = L^2(a,b)$ et $k(x,y)$ une fonction continue à valeurs complexes définie sur le carré $[a,b] \times [a,b]$. On définit un opérateur $A : H \to H$ par la relation

$$(Au)(x) = \int_a^b k(x,y)u(y)\,dy.$$

Alors $A \in \mathcal{L}(H)$ et

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \Big\{\Big(\max_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,y)|\,dy\Big)\Big(\max_{y\in[a,b]} \int_a^b |k(x,y)|\,dx\Big)\Big\}^{1/2}. \tag{1.7}$$

## 1.3 Projection, bases hilbertiennes et théorème d'isomorphisme

**Théorème 1.16.** *Soit $H$ un espace de Hilbert et $H_0 \subset H$ un sous-espace fermé. Alors pour tout $u \in H$ il existe un unique élément $u_0 \in H_0$ tel que*

$$\|u - u_0\| = \operatorname{dist}(u, H_0) := \inf_{v\in H_0} \|u - v\|. \tag{1.8}$$

*De plus, $u_0$ est l'unique élément de $H_0$ vérifiant la condition*

$$(u - u_0, v) = 0 \quad \textit{pour tout } v \in H_0. \tag{1.9}$$

L'élément $u_0 \in H_0$ est appelé la *projection orthogonale de $u$ sur $H_0$*. Le théorème 1.16 implique immédiatement le résultat suivant.

**Corollaire 1.17.** *Soit $H_0$ un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert $H$ et $H_0^\perp$ son complémentaire orthogonal, c'est-à-dire, l'ensemble des vecteurs $u \in H$ tels que $(u,v) = 0$ pour tout $v \in H_0$. Alors $H$ est représentable comme la somme directe $H = H_0 \oplus H_0^\perp$.*

*Exercice* 1.18. Soit $H$ un espace de Hilbert et $H_0 \subset H$ un sous-espace fermé. Montrer que l'opérateur $P$ qui envoie un vecteur $u \in H$ à sa projection orthogonale sur $H_0$ est linéaire et qu'elle vérifie les propriétés suivante :

$$P^2 = P, \quad \|P\|_{\mathcal{L}(H)} = 1.$$

*Démonstration du théorème.* Soit $\{v_n\} \subset H_0$ une suite telle que

$$\|u - v_n\| \to d := \operatorname{dist}(u, H_0) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

D'après l'égalité du parallélogramme appliquée aux vecteurs $u - v_n$ et $u - v_m$ on a

$$\begin{aligned}\|v_n - v_m\|^2 &= 2\|u - v_n\|^2 + 2\|u - v_m\|^2 - 4\Big\|u - \tfrac{v_n+v_m}{2}\Big\|^2 \\ &\leq 2\|u - v_n\|^2 + 2\|u - v_m\|^2 - 4d^2 \to 0 \quad \text{quand } m,n \to \infty.\end{aligned}$$

Donc, $\{v_n\}$ est une suite de Cauchy. On vérifie facilement que sa limite $u_0$ satisfait toutes les propriétés requises. $\square$

L'argument utilisé dans la démonstration du théorème permet d'établir une propriété similaire quand le sous-espace est remplacé par un ensemble convexe.

*Exercice* 1.19. Soit $K \subset H$ un ensemble convexe fermé. Alors pour tout $u \in H$ il existe un unique point $u_0 \in K$ tel que

$$\|u - u_0\| = \operatorname{dist}(u, K) := \inf_{v \in K} \|u - v\|.$$

**Définition 1.20.** Soit $H$ un espace de Hilbert séparable. Une suite $\{e_j\} \subset H$ est appelée une *base orthonormée de H* si elle possède les propriétés suivantes :

**(a)** $(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$ et $\|e_j\| = 1$ pour tout $j \geq 1$ ;

**(b)** tout vecteur $u \in H$ est représentable sous la forme

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} u_j e_j, \tag{1.10}$$

où la série converge pour la norme de $H$.

*Exercice* 1.21. Montrer que si $\{e_j\} \subset H$ est une base orthonormée, alors les vecteur $e_j$ sont linéairement indépendants, et dans la série (1.10) les coefficients sont calculés par $u_j = (u, e_j)$.

On dit qu'une suite $\{e_j\} \subset H$ est un système orthonormé si elle vérifié la propriété (a) de la définition 1.20.

**Proposition 1.22.** *Soit $\{e_j\} \subset H$ un système orthonormé. Alors pour tout $u \in H$ on a l'inégalité de Bessel :*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(u, e_j)|^2 \leq \|u\|^2. \tag{1.11}$$

*De plus, $\{e_j\}$ est une base si et seulement si on a la relation de Parseval :*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(u, e_j)|^2 = \|u\|^2. \tag{1.12}$$

*Démonstration.* Il est facile à vérifier que

$$0 \leq \left\| u - \sum_{j=1}^{N} (u, e_j) e_j \right\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{N} |(u, e_j)|^2,$$

d'où, en passant à la limite quand $N \to \infty$, on obtient l'inégalité de Bessel (1.11).

Si $\{e_j\}$ est une base orthonormée, alors on a la représentation (1.10). En prenant la norme au carré, on obtient la relation (1.12). Réciproquement, supposons que la relation de Parseval a lieu. Alors

$$\left\| u - \sum_{j=1}^{\infty} (u, e_j) e_j \right\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{\infty} |(u, e_j)|^2 = 0,$$

d'où on conclut que la relation (1.10) a lieu. $\square$

*Exercice* 1.23. Soit $H$ un espace de Hilbert. Montrer qu'un système orthonormé est une base si et seulement si l'ensemble des combinaisons linéaires de ses vecteurs est dense dans $H$.

L'existence d'une projection orthogonale permet de construire une base orthonormée pour tout espace de Hilbert séparable et de montrer que tous les espaces de Hilbert séparables sont isométriques.

**Théorème 1.24.** *Soit $H$ un espace de Hilbert séparable. Alors elle possède une base orthonormée. De plus, si $H_1$ et $H_2$ sont deux espaces de Hilbert séparables, alors il existe une bijection linéaire $V : H_1 \to H_2$ telle que*

$$\|Vu\|_{H_2} = \|u\|_{H_1} \quad \textit{pour tout } u \in H_1.$$

*Démonstration.* Pour tout espace de Hilbert séparable $H$, il existe une suite $\{f_j\} \subset H$ de vecteurs linéairement indépendants telle que les combinaisons linéaire de $f_j$ sont denses. On définit un système orthonormé $\{e_j\}$ en utilisant le *procédé d'orthogonalisation de Gramm–Schmidt* :

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}, \qquad e_j = \frac{f_j - P_{j-1}f_j}{\|f_j - P_{j-1}f_j\|}, \quad j \geq 2,$$

où $P_j$ désigne le projecteur orthogonal sur l'espace engendré par les vecteurs $f_1, \dots, f_j$. En utilisant le fait que l'espace vectoriel engendré par $e_1, \dots, e_j$ est confondu avec celui engendré par $f_1, \dots, f_j$, on montrer que $\{e_j\}$ est une base orthonormée ; voir l'exercice 1.23.

Soit maintenant $H_1, H_2$ deux espaces de Hilbert séparables avec des bases orthonormées $\{e_j\}$, $\{f_j\}$. On définit un opérateur linéaire $V : H_1 \to H_2$ par $Ve_j = f_j$ pour tout $j \geq 1$. Il est facile à vérifier que $V$ satisfait toutes les propriétés requises. □

## 1.4 Théorème de Riesz

Soit $H$ un espace de Hilbert. On note $H^*$ l'espace de fonctionnelles continues sur $H$, c'est-à-dire, l'espace $\mathcal{L}(H, \mathbb{C})$. On appelle $H^*$ l'espace dual de $H$, et on le munit de la norme naturelle

$$\|f\|_{H^*} = \sup_{\|u\| \leq 1} |f(u)|.$$

*Exercice* 1.25. Montrer que pour tout $u \in H$ l'application $f_u : v \mapsto (v, u)$ appartient à $H^*$. De plus, $\|f_u\|_{H^*} = \|u\|_H$.

Le théorème suivant est l'énoncé réciproque de l'exercice 1.25 et permet d'identifier tout espace de Hilbert avec son dual.

**Théorème 1.26.** *Pour tout élément $f \in H^*$ il existe un unique vecteur $u_f \in H$ tel que*

$$f(v) = (v, u_f) \quad \textit{pour tout } v \in H. \tag{1.13}$$

*De plus, l'application $L : H^* \to H$ qui envoie $f$ à $u_f$ est anti-linéaire et vérifie la relation*

$$\|Lf\|_H = \|f\|_{H^*} \quad \textit{pour tout } f \in H^*. \tag{1.14}$$

*Démonstration.* Soit $H_0 \subset H$ le sous-espace fermé sur lequel la fonctionnelle $f$ est nulle. Si $H_0$ est confondue avec $H$, alors $f = 0$, et on pose $u_f = 0$. Si $H_0$ est un sous-espace propre, alors on note $u_0$ un élément de norme 1 dans le complémentaire orthogonal de $H_0$. On cherche $u_f$ sous la forme $u_f = cu_0$. Si (1.13) a lieu, alors $f(u_f) = \|u_f\|^2$, d'où on conclut que $c = \overline{f(u_0)}$.

Montrons que (1.13) a lieu avec $u_f = \overline{f(u_0)}u_0$ et que $\|u_f\|_H = \|f\|_{H^*}$. En effet, tout vecteur $v \in H$ est représentable sous la forme $v = (v, u_0)u_0 + v'$, où $v' \in H_0$. Alors

$$f(v) = f\big((v, u_0)u_0 + v'\big) = \big(v, \overline{f(u_0)}u_0\big) = (v, u_f).$$

De plus, on a

$$|f(u_0)| = |(u_0, u_f)| = \|u_f\|, \quad |f(v)| = |(v, u_f)| \le \|u_f\|\,\|v\|.$$

Ceci achève la démonstration du théorème. □