2 Espaces de Banach

2.1 Définition et exemples

Soit X un espace vectoriel complexe. Une fonction positive $\|\cdot\|$ définie sur X est appelée une *norme* si elle vérifie (1.4), et la relation $\|u\| = 0$ implique que $u = 0$. Toute norme sur X définit une distance par la formule $\|u - v\|$.

Définition 2.1. Un espace vectoriel X muni d'une norme $\|\cdot\|$ est appelé un *espace de Banach* si il est complet par rapport à la distance définie par la norme.

Considérons quelques exemples. Rappelons que les espaces ℓ, $C([a,b])$ et $\mathcal{P}$ sont définis dans les exemples 1.5. Pour $1 \le p < \infty$, définissons les fonctions suivantes sur ces espaces :

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}, \quad \|\boldsymbol{x}\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\ge 1} |x_n|,$$
$$\|f\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad \|f\|_{L^\infty(a,b)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[a,b]} |f(x)|,$$
$$\|g\|_{L^\infty} = \sup_{z\in D} |g(z)|,$$

où $\boldsymbol{x} \in \ell$, $f \in C([a,b])$ et $g \in \mathcal{P}$.

Exercice 2.2. Montrer que $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$, $\|\cdot\|_{L^\infty(a,b)}$ et $\|\cdot\|_{L^\infty(D)}$ sont des normes sur des espaces correspondants et que $C([a,b])$ est un espace de Banach, mais ℓ et $\mathcal{P}$ ne l'ont pas.

Proposition 2.3. *Les fonctions $\|\cdot\|_{\ell^p}$ et $\|\cdot\|_{L^p(a,b)}$ sont des normes sur les espaces ℓ et $C([a,b])$ respectivement, mais ces espaces ne sont pas complets.*

Démonstration. La deuxième relation de (1.4) est évidente, donc nous n'allons montrer que l'inégalité. On admet l'inégalité de Hölder :

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q}, \tag{2.1}$$

$$\left|\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}, \tag{2.2}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors on peut écrire

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_{\ell^p}^p &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^{p-1}(|x_n| + |y_n|) \\ &\le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \big(\|\boldsymbol{x}\|_{\ell^p} + \|\boldsymbol{y}\|_{\ell^p}\big),\end{aligned}$$

d'où l'inégalité cherchée pour ℓ^p. La même idée marche aussi pour $\|\cdot\|_{L^p(a,b)}$.

Montrons que ℓ n'est pas complet. En effet, considérons la suite

$$\boldsymbol{x}_j = \Big(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^j}, 0, 0, \dots\Big).$$

Alors il est facile à voir qu'elle est de Cauchy, mais elle n'a pas de limite dans ℓ.

Montrons enfin que $C([a,b])$ n'est pas complet. Pour simplifier, supposons que $a=-1$ et $b=1$. Soit la suite

$$f_j(x) = \begin{cases} -1, & x \le -j^{-1}, \\ jx, & |x| \le j^{-1}, \\ -1, & x \ge j^{-1}. \end{cases}$$

Alors $\{f_j\}$ est de Cauchy, mais elle n'a pas de limite dans $C([a,b])$. □

On introduit la notion de *complétion* pour les espaces de Banach de la même manière que dans le cas des espaces de Hilbert ; voir la définition 1.6. Les espaces suivants sont des complétions de ℓ, $C([a,b])$ ou $\mathcal{P}$ pour diverses normes :

1. pour $1 \le p < \infty$, l'espace ℓ^p de suites $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\ge1}$ vérifiant la condition $\|\boldsymbol{x}\|_{\ell^p} < \infty$ est la complétion de ℓ pour la norme $\|\cdot\|_{\ell^p}$;
2. l'espace ℓ_0 de suites $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\ge1}$ qui convergent vers zéro quand $n\to\infty$ est la complétion de ℓ pour la norme $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$;
3. l'espace $L^p(a,b)$ de fonctions mesurables $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ vérifiant la condition $\|f\|_{L^p(a,b)} < \infty$ est la complétion de $C([a,b])$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^p(a,b)}$;
4. l'espace $\mathcal{A}^\infty(D)$ de fonctions analytiques $f : D \to \mathbb{C}$ qui admettent une extension continue sur $\overline{D}$ est la complétion de $\mathcal{P}$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^\infty(D)}$.

Exercice 2.4. Démontrer les énoncés mentionnées ci-dessus.

2.2 Théorème de Baire

Théorème 2.5. *Soit X un espace de Banach représenté comme la réunion de sous-ensmbles X_n, $n\ge1$. Alors il existe un entier n_0 tel que X_{n_0} est dense dans une boule.*

Démonstration. Supposons que l'adhérence $\overline{X}_n$ ne contient de boules pour aucun entier n. Alors $X \setminus X_1$ contient une boule non dégénérée $B(u_1, r_1)$. De même, comme $\overline{X}_2$ ne contient pas de boule, l'ensemble $B(u_1,r_1)\setminus X_2$ contient une boule non dégénérée $B(u_2,r_2)$. Par récurrence, on consruit une suite de boules non dégénérées $B(u_n,r_n) \subset X \setminus \big(\cup_{k=1}^n X_k\big)$ telle que

$$r_n \to 0 \quad \text{quand } n\to\infty, \qquad B(u_n,r_n) \supset B(u_{n+1},r_{n+1}) \quad \text{pour tout } n\ge1.$$

Il est facile à vérifier que la suite $\{u_n\}$ converge vers un point $\hat{u}$ qui n'appartient à aucun ensemble X_n. Ceci contredit au fait que X est la réunion de X_n, $n\ge1$. □

Exercice 2.6. Montrer que le théorème de Baire est équivalent à la propriété suivante : dans un espace de Banach, l'intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

Le théorème de Baire reste vrai pour des espaces métriques complets. Une application intéressante de ce résultat à la théorie de fonctions est donnée dans l'exercice suivant.

Exercice 2.7. Soit $I = [0, 1]$ et $P(x, y)$ une fonction continue définie sur $I \times I$ telle que $P(\cdot, y)$ et $P(x, \cdot)$ sont des polynômes pour tout $x, y \in I$. Montrer que P est un polynôme.

2.3 Théorème de Banach–Steinhaus

Soient X, Y deux espace de Banach. On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace d'opérateurs linéaires continus de X dans Y.

Exercice 2.8. Montrer que les propriétés de l'exercice 1.11 restent vrai pour les espaces de Banach. Montrer aussi que $\mathcal{L}(X, Y)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ est un espace de Banach.

Théorème 2.9. *Soient X, Y deux espaces de Banach et $A_\gamma : X \to Y$, $\gamma \in \Gamma$, une famille d'opérateurs continus telle que*

$$\|A_\gamma u\|_Y \leq C_u \quad \textit{pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

Alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|A_\gamma\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq C \quad \textit{pour tout } \gamma \in \Gamma. \tag{2.3}$$

Démonstration. Nous allons utiliser le théorème de Baire. Soit

$$X_n = \{u \in X : \|Au\|_Y \leq n\|u\|_X\}.$$

Alors $X = \cup_n X_n$. Donc, il existe une boule $B(u_0, r_0) \subset X$ et un entier $n_0 \geq 1$ tels que $\overline{X}_{n_0} \supset B(u_0, r_0)$:

$$\|A_\gamma u\|_Y \leq n_0\|u\|_X \leq C_1 \quad \text{pour tout } u \in B(u_0, r_0),\ \gamma \in \Gamma,$$

où $C_1 = n_0(\|u_0\|_X + r_0)$. Ceci implique que

$$\|A_\gamma u\|_Y \leq C_1 \quad \text{pour tout } u \in B(0, r_0),\ \gamma \in \Gamma.$$

d'où on obtient l'inégalité (2.3) avec $C = C_1/r_0$. □

2.4 Théorème de Hahn–Banach

Pour un espace de Banach X, on note X^* le dual de X, c'est-à-dire, l'espace des fonctionnelles linéaires continues $f : X \to \mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|f\|_{X^*} := \sup_{\|u\|_X \leq 1} |f(u)|\,.$$

Le théorème suivant implique, en particulier, que X^* n'est pas vide et sépare les points de X. Nous considérons ici le cas réel, mais le résultat reste vrai aussi pour le cas complexe.

Théorème 2.10. *Soit X un espace de Banach réel, $X_0 \subset X$ un sous-espace vectoriel, et $f_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle linéaire continue telle que*

$$|f_0(u)| \leq C\|u\|_X \quad \textit{pour tout } u \in X_0.$$

Alors il existe $f \in X^*$ tel que

$$f\big|_{X_0} = f_0, \quad \|f\|_{X^*} \leq C.$$

Démonstration. Pour simplifier, nous n'allons considérer que le cas d'un espace séparable, c'est-à-dire, on suppose qu'il existe une suite dense dans X. La démonstration dans le cas général est basée sur le lemme de Zorn ; voir [Yos78].

On peut supposer que $C = 1$. Soit $\{u_n\} \subset X$ une suite de vecteurs unités linéairement indépendants telle que l'espace vectoriel engendré par X_0 et $\{u_n\}$ est dense dans X. Nous allons construire par récurrence une suite d'extensions f_n de la fonctionnelle f_0 à l'espace $X_n := \mathrm{Vect}\{X_0, u_1, \ldots, u_n\}$. Supposons que f_n est déjà construit. Alors pour $u \in X_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose

$$f_{n+1}(u + \alpha u_{n+1}) = f_n(u) + \alpha p,$$

où $p \in \mathbb{R}$. On veut choisir p tel que

$$|f_n(u) + \alpha p| \leq \|u + \alpha u_{n+1}\| \quad \text{pour tout } u \in X_n,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Il est facile à voir que cette inégalité est équivalente aux conditions suivantes :

$$p \leq \frac{\|u + \alpha u_{n+1}\| - f_n(u)}{\alpha}, \quad p \geq \frac{f_n(u) - \|u - \alpha u_{n+1}\|}{\alpha}, \quad \forall\, \alpha > 0, \quad \forall\, u \in X_n.$$

Une telle constante existe si

$$\frac{\|u + \alpha u_{n+1}\| - f_n(u)}{\alpha} \geq \frac{f_n(v) - \|v - \beta u_{n+1}\|}{\beta} \quad \text{pour tous } \alpha, \beta > 0,\ u, v \in X_n.$$

Cette condition est équivalente à

$$f_n(\alpha v + \beta u) \leq \|\alpha v - \alpha\beta u_{n+1}\| + \|\beta u + \beta\alpha u_{n+1}\|. \tag{2.4}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, l'inégalité (2.4) est vérifiée pour tous $\alpha, \beta > 0$ et $u, v \in X_n$.

Il existe donc une fonctionnelle $\tilde{f} : \cup_n X_n \to \mathbb{R}$ telle que

$$\tilde{f}\big|_{X_0} = f_0, \quad |\tilde{f}(u)| \leq \|u\|_X \quad \text{pour tout } u \in \cup_n X_n.$$

Par continuité, on peut prolonger la fonctionnelle $\tilde{f}$ à l'adhérence de $\cup_n X_n$, qui coïncide avec X. $\square$

Corollaire 2.11. *Pour tout $u, v \in X$ il existe une fonctionnelle $f \in X^*$ telle que $f(u) = 0$ et $f(v) = 1$.*

Exercice 2.12. Enoncer et démontrer le théorème de Hahn–Banach dans le cas complexe. *Indication :* voir § IV.4 dans [Yos78].

2.5 Théorème de Banach de l'application inverse

Théorème 2.13. *Soient X_1, X_2 deux espaces de Banach et $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ une bijection. Alors $A^{-1} \in \mathcal{L}(X_2, X_1)$.*

Ce théorème implique immédiatement les deux corollaires suivants :

Corollaire 2.14. *Soit X un espace de vectoriel muni des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. Supposons X est complet par rapport à ces normes et que*

$$\|u\|_1 \leq C\,\|u\|_2 \quad \textit{pour tout } u \in X.$$

Alors il existe une constante $C' > 0$ telle que

$$\|u\|_2 \leq C'\|u\|_1 \quad \textit{pour tout } u \in X.$$

Corollaire 2.15. *Soit $A : X_1 \to X_2$ une application linéaire et*

$$\Gamma(A) = \{(u_1, u_2) \in X_1 \times X_2 : u_2 = Au_1\}$$

le graphe de A. Alors $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ si et seulement si $\Gamma(A)$ est un sous-espace fermé du produit direct $X_1 \times X_2$.

Démonstration du théorème 2.13. On note $B \subset X_1$ la boule unité de centre zéro et $Y_\rho = A(\rho B) = \rho A(B)$. Alors $\cup_{n\geq 1} Y_n = X_2$, et d'après le théorème de Baire, il existe un entier $m \geq 1$ et une boule $B(u, r) \subset X_2$ telle que Y_m soit dense dans $B(u, r)$. Comme Y_m est symétrique par rapport à zéro et convexe, on conclut que Y_m est dense dans $B(0, r)$ et que Y_1 est dense dans la boule $B(0, \varepsilon)$ avec $\varepsilon = r/m$. Si on arrive à montrer que $\overline{Y_1} \subset Y_2$, alors on aura que $Y_2 \supset B(0, \varepsilon)$, et donc

$$\|A^{-1}v\|_1 \leq 2 \quad \text{pour } v \in X_2,\ \|v\| = \varepsilon.$$

Ceci implique que la norme de A^{-1} est majorée par $2/\varepsilon$.

Montrons maintenant que $\overline{Y_1} \subset Y_2$. Soit $v \in \overline{Y_1}$. Alors il existe $u_1 \in B$ tel que $v - Au \in B(0, \varepsilon/2)$. De même, comme $B(0, \varepsilon/2) \subset \overline{Y_{1/2}}$, il existe $u_2 \in \frac{1}{2}B$ tel que $v - A(u_1 + u_2) \in B(0, \varepsilon/4)$. On construit ainsi une suite $u_j \in 2^{1-j}B$ telle que

$$u - \sum_{j=1}^{n} Au_j \in B(0, 2^{-n}\varepsilon) \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

On pose maintenant $u = \sum_j u_j$. Alors $u \in 2B$ et $Au = v$. □