3 Equations de Laplace et de Poisson

3.1 Formule d'intégration par parties

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné à bord régulier $\partial\Omega$ de classe C^1. On note $\nu = \nu(x)$ le vecteur normal extérieur au point $x \in \partial\Omega$. Pour toutes fonctions $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ on a

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx = \int_{\partial\Omega} u\, v\, \nu_j d\sigma - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v\, dx, \tag{3.1}$$

où ν_j désigne la j-ième composante du vecteur ν. Dans le cas $d = 2$, la démonstration de (3.1) est donnée au paragraphe 6.2.

Soit Δ l'opérateur de Laplace :

$$\Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

En utilisant (3.1) on obtient facilement les *formules de Green* pour toutes fonctions $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$:

$$\int_\Omega \Delta u\, v\, dx = -\sum_{j=1}^{d} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, v\, d\sigma, \tag{3.2}$$

$$\int_\Omega \big(\Delta u\, v - u\Delta v\big)\, dx = \int_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu}\, v - \frac{\partial v}{\partial \nu} u\Big)\, d\sigma, \tag{3.3}$$

où $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_j$ désigne la dérivée normale de u.

Exercice 3.1. Démontrer les relations (3.2) et (3.3).

3.2 Relations pour les valeurs moyennes

Théorème 3.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $u \in C^2(\Omega)$ une fonction vérifiant l'équation $\Delta u = 0$ dans Ω. Alors pour toute boule $B_R = B_R(y) \subset \Omega$ on a*

$$u(y) = \frac{1}{d\omega_d R^{d-1}} \int_{\partial B_R} u\, d\sigma = \frac{1}{\omega_d R^d} \int_{B_R} u\, dx, \tag{3.4}$$

où ω_d désigne le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^d$.

Démonstration. Soit $\rho \in]0, R[$. On applique la formule de Green (3.2) avec $v \equiv 1$ et $\Omega = B_R$:

$$0 = \int_{B_\rho} \Delta u\, dx = \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma. \tag{3.5}$$

Pour simplifier, on suppose que $y = 0$. En passant aux coordonnées polaires, on obtient (voir (6.2))

$$\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = \int_{\partial B_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\rho\omega)\rho^{d-1} d\omega = \rho^{d-1}\frac{\partial}{\partial \rho}\int_{\partial B_1} u(\rho\omega)\, d\omega$$
$$= \rho^{d-1}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^{1-d}\int_{\partial B_\rho} u\, d\sigma\right).$$

On reporte cette égalité dans (3.5) et on intègre en $\rho \in]\varepsilon, R[$:

$$R^{1-d}\int_{\partial B_R} u\, d\sigma = \varepsilon^{1-d}\int_{\partial B_\varepsilon} u\, d\sigma = \varepsilon^{1-d}\int_{\partial B_\varepsilon} \big(u(0)+O(\varepsilon)\big)\, d\sigma = d\omega_d u(0)+O(\varepsilon),$$

d'où la première égalité de (3.4). Pour obtenir la deuxième égalité, il suffit d'écrire

$$d\omega_d \rho^{d-1} u(y) = \int_{\partial B_\rho} u\, d\sigma, \quad 0 < \rho < R,$$

et d'intégrer cette relation par rapport à $\rho \in]0, R[$. □

Exercice 3.3. Montrer que si $u \in C^2(\Omega)$ et $\Delta u \geq 0$, alors

$$u(y) \leq \frac{1}{d\omega_d R^{d-1}}\int_{\partial B} u\, d\sigma = \frac{1}{\omega_d R^d}\int_B u\, dx.$$

De même, si $\Delta u \leq 0$, on a l'inégalité inverse.

3.3 Principe du maximum et unicité pour le problème de Dirichlet

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert connexe et $u \in C^2(\Omega)$. On dit u est *harmonique* si $\Delta u(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Théorème 3.4. *Soit $u \in C^2(\Omega)$ une fonction harmonique. Supposons qu'il existe $y \in \Omega$ tel que*

$$u(y) = \sup_{x\in\Omega} u(x).$$

Alors $u \equiv$ const.

Corollaire 3.5. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné et $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ une fonction harmonique. Alors*

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u \quad \textit{pour tout } x \in \Omega. \tag{3.6}$$

Corollaire 3.6. *Soient $u, v \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ deux fonctions telles que $\Delta u = \Delta v$ dans Ω et $u = v$ sur $\partial\Omega$. Alors $u \equiv v$.*

Démonstration du théorème. Soit $M = \sup_\Omega u$ et $\Omega_M = \{x \in \Omega, u(x) = M\}$. Alors Ω_M est fermé dans Ω et non vide. Montrons que Ω_M est ouvert. Soit $z \in \Omega_M$ et $B = B_R(z) \subset \Omega$ une boule. On applique la relation (3.4) à la fonction harmonique $u - M$:

$$0 = u(z) - M = \frac{1}{\omega_d R^d} \int_B (u - M)\, dx \leq 0,$$

d'où on conclut que $u = M$ dans $B_R(z)$, et donc $B_R(z) \subset \Omega_M$. Comme $\Omega_M \neq \varnothing$ est connexe et à la fois ouvert et fermé, on voit que $\Omega_M = \Omega$ et $u \equiv M$ dans Ω. □

3.4 Inégalité de Harnack

Théorème 3.7. *Soit $u \in C^2(\Omega)$ une fonction harmonique non négative. Alors pour tout domaine connexe borné $\Omega' \subset \Omega$ tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ il existe une constante $C = C(d, \Omega', \Omega) > 0$ telle que*

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u. \tag{3.7}$$

Démonstration. Soit $y \in \Omega$ et $B_{4R}(y) \subset \Omega$. Alors pour $x_1, x_2 \in B_R(y)$ on a

$$\begin{aligned} u(x_1) &= \frac{1}{\omega_d R^d} \int_{B_R(x_1)} u\, dx \leq \frac{1}{\omega_d R^d} \int_{B_{2R}(y)} u\, dx, \\ u(x_2) &= \frac{1}{\omega_d (3R)^d} \int_{B_{3R}(x_2)} u\, dx = \frac{1}{\omega_d (3R)^d} \int_{B_{2R}(y)} u\, dx, \end{aligned}$$

d'où on conclut que

$$u(x_1) \leq 3^d u(x_2) \quad \text{pour tous } x_1, x_2 \in B_R(y).$$

Cette inégalité entraîne que

$$\sup_{B_R(y)} u \leq 3^d \inf_{B_R(y)} u. \tag{3.8}$$

Un argument de compacité permet d'obtenir (3.7) à l'aide de l'inégalite (3.8). □

3.5 Représentation de Green

On utilise maintenant les formules de Green pour obtenir une représentation d'une fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$ à l'aide de Δu et des valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ sur $\partial\Omega$. Soit

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{d(2-d)\omega_d} |x|^{2-d} & \text{pour } d \geq 3, \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln |x| & \text{pour } d = 2. \end{cases}$$

Exercice 3.8. Montrer que

$$\partial_j \Gamma(x) = \frac{x_j}{d\omega_d} |x|^{-d}, \tag{3.9}$$

$$\partial_i \partial_j \Gamma(x) = \frac{1}{d\omega_d} \left(\delta_{ij} - d x_i x_j |x|^{-2}\right) |x|^{-d}. \tag{3.10}$$

En déduire que la fonction Γ est harmonique pour $x \neq 0$ et vérifie les inégalités

$$|\partial_j \Gamma(x)| \leq \frac{1}{d\omega_d} |x|^{1-d}, \tag{3.11}$$

$$|\partial_i \partial_j \Gamma(x)| \leq \frac{1}{\omega_d} |x|^{-d}. \tag{3.12}$$

Théorème 3.9. *Soit $u \in C^2(\overline{\Omega})$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine borné à bord régulier. Alors*

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y) \Delta u(y)\, dy + \int_{\partial\Omega} \Big(u(y) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Big)\, d\sigma, \quad x \in \Omega. \tag{3.13}$$

Corollaire 3.10. *Soit $u \in C^2(\Omega)$ une fonction harmonique. Alors $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $x \in \Omega$ et $B_\varepsilon \subset \Omega$ la boule de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$. On applique la formule de Green (3.3) avec $v = \Gamma(x - \cdot)$ et Ω remplacé par $\Omega \setminus B_\varepsilon$. Comme $\Gamma(x-y)$ est harmonique en y pour $y \neq x$, on obtient

$$\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \Gamma(x-y) \Delta u(y)\, dy = \int_{\partial\Omega} \Big(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} \Big)\, d\sigma + \int_{\partial B_\varepsilon} \Big(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} \Big)\, d\sigma. \tag{3.14}$$

Il est facile à voir que

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon} \Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma \right| = \left| \Gamma(\varepsilon) \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma \right| \leq d\omega_d \varepsilon^{d-1} \sup_{\partial B_\varepsilon} |\nabla u| \to 0,$$

$$\int_{\partial B_\varepsilon} u \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\, d\sigma = -\frac{\varepsilon^{1-d}}{d\omega_d} \int_{\partial B_\varepsilon} u\, d\sigma \to -u(x)$$

quand $\varepsilon \to 0^+$. En utilisant ces relations pour passer à la limite dans (3.14) lorsque $\varepsilon \to 0^+$, on obtient (3.13). □

Exercice 3.11. Montrer que si $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ est une fonction à support compact, alors

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(x-y) \Delta u(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Soit maintenant $h_x(y)$, $x \in \Omega$, une famille de fonctions harmonique en y telle que

$$h_x(y) = -\Gamma(x-y) \quad \text{pour } x \in \Omega,\ y \in \partial\Omega. \tag{3.15}$$

Alors, d'après la formule (3.3) avec $v = h_x$, on a

$$0 = \int_{\partial\Omega} h\Delta u(y)\,dy + \int_{\partial\Omega}\Big(\frac{\partial h}{\partial\nu}u - \frac{\partial u}{\partial\nu}h\Big)\,d\sigma, \quad x \in \Omega. \tag{3.16}$$

En prenant la somme de (3.13) et (3.16), pour toute fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$ on obtient

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)\Delta u(y)\,dy + \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu_y}\,d\sigma, \quad x \in \Omega, \tag{3.17}$$

où $G(x,y) = \Gamma(x-y) + h_x(y)$, et on a utilisé la condition (3.15). On appelle $G = G(x,y)$ la *fonction de Green* pour le problème de Dirichlet.

3.6 Existence de solution

Théorème 3.12. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné à bord régulier. Alors pour toute fonction $\varphi \in C(\partial\Omega)$ il existe une unique solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ du problème*

$$\Delta u = 0 \quad \textit{dans } \Omega, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = \varphi. \tag{3.18}$$

Démonstration. L'unicité est démontrée dans le corollaire 3.6. Nous n'allons démontrer l'existence que dans le cas $\Omega = B_R = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < R\}$.

Pour $x \neq 0$, on pose $\hat{x} = \frac{R^2}{|x|^2}x$. On vérifie facilement (exercice) que la fonction

$$h_x(y) = \begin{cases} -\Gamma\big(\frac{|x|}{R}(\hat{x} - y)\big), & x \neq 0, \\ -\Gamma(R), & x = 0, \end{cases}$$

est solution du problème

$$\Delta_y h_x = 0 \quad \text{dans } B_R, \qquad h_x\big|_{\partial B_R} = -\Gamma(x-y).$$

Donc, on définit la fonction de Green par

$$G(x,y) = \begin{cases} \Gamma(x-y) - \Gamma\big(\frac{|x|}{R}(\hat{x} - y)\big), & x \neq 0, \\ \Gamma(x-y) - \Gamma(R), & x = 0, \end{cases}$$

Montrons que la fonction

$$u(x) = \begin{cases} \int_{\partial B_R} \frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu_y}\varphi(y)\,d\sigma, & x \in B_R, \\ \varphi(x), & x \in \partial B_R, \end{cases}$$

est solution du problème (3.18) avec $\Omega = B_R$. En effet, on a

$$\Delta_x G(x,y) = \Delta_x \frac{\partial}{\partial\nu_y} G(x,y) = 0 \quad \text{pour } x \in B_R,\ y \in \partial B_R.$$

Ceci entraîne que $\Delta u = 0$ dans B_R. Pour montrer que $u \in C(\overline{B}_R)$, on applique la formule (3.17) à la fonction $u \equiv 1$.

$$\int_{\partial B_R} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma = 1.$$

De plus, on vérifie que

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y} = \frac{R^2 - |x|^2}{d\omega_d R|x-y|^d}, \quad x \in B_R, \quad y \in \partial B_R.$$

Soit $x_0 \in \partial B_R$ et $\varepsilon > 0$. On choisit des constantes $\delta > 0$ et $M > 0$ telles que

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon \quad \text{pour } |x - x_0| < \delta, \qquad |\varphi| \leq M \quad \text{sur } \partial B_R.$$

Alors, pour $|x - x_0| < \delta/2$, on obtient

$$\begin{aligned} |u(x) - \varphi(x_0)| &< \left| \int_{\partial B_R} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y} (\varphi(y) - \varphi(x_0)\, d\sigma \right| \\ &= \int_{|y-x_0|<\delta} + \int_{|y-x_0|>\delta} \leq \varepsilon + 2M \frac{(R^2 - |x|^2)R^{d-2}}{(\delta/2)^d}. \end{aligned}$$

Si $|x - x_0| \ll 1$, alors le deuxième terme est majoré par ε. Donc,

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0) \quad \text{pour tout } x \in \partial B_R.$$

□

Corollaire 3.13 (Formule de Poisson)**.** *La solution du problème* (3.18) *avec* $\Omega = B_R$ *est donnée par*

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{d\omega_d R} \int_{\partial B_R} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^d}\, d\sigma$$

Théorème 3.14. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné à bord régulier et $f \in C^2(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C(\overline{\Omega})$. Alors il existe une unique solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ du problème*

$$\Delta u = f \quad \textit{dans } \Omega, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = \varphi. \tag{3.19}$$

Démonstration. Il suffit de montrer l'existence de solution. Soit $\tilde{f} \in C^2(\mathbb{R}^d)$ une fonction à support compact telle que $\tilde{f}|_{\partial\Omega} = f$. On définit la fonction

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(x-y)\tilde{f}(y)\, dy. \tag{3.20}$$

Supposons que nous avons montré que $v \in C^2(\mathbb{R}^d)$ et $\Delta v = \tilde{f}$ sur $\mathbb{R}^d$. On cherche une solution de (3.19) sous la forme $u = v + w$. La fonction w doit être solution du problème

$$\Delta w = 0 \quad \text{dans } \Omega, \qquad w\big|_{\partial\Omega} = \varphi - v\big|_{\partial\Omega}.$$

D'après le théorème 3.12, ce problème a une unique solution $w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. On conclut que la fonction $u = v + w$ appartient à l'espace $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ et vérifie (3.19).

On montre maintenant les propriétés énoncées de la fonction v. On a

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(y)\tilde{f}(x-y)\,dy,$$

d'où on voit que $v \in C^2(\mathbb{R}^d)$ et

$$\Delta v(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(y)\Delta_x \tilde{f}(x-y)\,dy = \int_{B_\varepsilon} + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon} = I_\varepsilon + J_\varepsilon. \tag{3.21}$$

Comme Γ est intégrable, on a

$$I_\varepsilon \to 0 \quad \text{quand } \varepsilon \to 0^+. \tag{3.22}$$

De plus, en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon} \Gamma(y)\Delta_x \tilde{f}(x-y)\,dy \\ &= \int_{\partial B_\varepsilon} \Big(\frac{\partial \tilde{f}(x-y)}{\partial \nu_y}\Gamma(y) - \frac{\partial \Gamma(y)}{\partial \nu_y}\tilde{f}(x-y)\Big)\,d\sigma \overset{\varepsilon\to 0}{\to} f(x). \end{aligned} \tag{3.23}$$

En comparant (3.21) – (3.23), on voit que $\Delta v = \tilde{f}$. □