4 Equation des ondes

Ce paragraphe est consacré à l'étude de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{4.1}$$

où $a > 0$ est un paramètre et f est une fonction donnée. Nous allons obtenir des formules explicites pour des solutions dans le cas $d = 1$ ou 3 et établir l'unicité de solution en utilisant l'estimation d'énergie.

4.1 Formule de d'Alembert

Considérons le problème de Cauchy pour l'équation (4.1) :

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{4.2}$$

où u_0, u_1 sont des fonctions données.

Théorème 4.1 (formule de d'Alembert)**.** *Soit $d = 1$, $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ et $f \equiv 0$. Alors le problème* (4.1), (4.2) *possède une unique solution $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, qui est donnée par la relation*

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\big(u_0(x+at) + u_0(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(y)\, dy. \tag{4.3}$$

Démonstration. On obtient d'abord une formule pour la solution générale. Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ une solution de l'équation (4.1) avec $f \equiv 0$. On fait un changement de variables

$$x + at = \xi, \quad x - at = \eta \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad x = \frac{1}{2a}(\xi - \eta).$$

Alors $\partial_t = a(\partial_\xi - \partial_\eta)$, $\partial_x = \partial_\xi + \partial_\eta$, et la fonction $v(\xi,\eta) = u(t,x)$ vérifie l'équation $\partial_\xi \partial_\eta v = 0$ pour $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$. Cette équation implique

$$v(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

où $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$. On voit que

$$u(t,x) = \varphi(x+at) + \psi(x-at). \tag{4.4}$$

Montrons maintenant l'unicité. Si $u(0,x) = 0$, alors $\psi(x) = -\varphi(x)$. Si, en plus, $\partial_t u(0,x) = 0$, alors $\varphi'(x) = 0$, d'où on conclut que $\varphi(x) = c = -\psi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $u \equiv 0$.

On établit maintenant (4.3). Les conditions initiales (4.2) et la formule (4.4) impliquent que

$$\varphi(x) + \psi(x) = u_0(x), \quad a(\varphi'(x) - \psi'(x)) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La solution de ce système est donnée par les formules

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x u_1(y)\,dy + C,$$
$$\psi(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x u_1(y)\,dy - C,$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. En reportant ces relations dans (4.4), on obtient (4.3). □

Exercice 4.2. Résoudre le problème

$$\begin{aligned}
&\partial_t^2 u - a^2\partial_x^2 u = 0, && t \in \mathbb{R}, \quad x > 0,\\
&u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x), && x > 0,\\
&u(t,0) = 0, && t \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

où $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R})$ sont des fonctions données vérifiant la condition $u_0(0) = u_0''(0) = u_1(0) = 0$.

4.2 Formule de Kirchhoff

On considère maintenant l'équation des ondes dans le cas $d = 3$. Pour toute fonction $g \in C(\mathbb{R}^3)$, on pose

$$S_r g(x) = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} g(y)d\sigma = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B} g(x+ry)\,d\sigma_y, \tag{4.5}$$

où $B \subset \mathbb{R}^3$ désigne la boule unité de centre zéro.

Théorème 4.3. *Soit $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ et $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Alors le problème* (4.1), (4.2) *avec $f \equiv 0$ possède une solution $u \in C^2(\mathbb{R}^4)$ donnée par*

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\,t\,S_{at}u_0(x) + t\,S_{at}u_1(x). \tag{4.6}$$

Démonstration. Montrons d'abord que

$$\Delta_x S_r g(x) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\big(rS_r g(x)\big). \tag{4.7}$$

En effet, on a

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rS_r g) = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}S_r g + \frac{\partial^2}{\partial r^2}S_r g. \tag{4.8}$$

En utilisant la formule d'intégration par parties, on calcule les dérivées de la fonction $S_r g$ en r :

$$\begin{aligned}
\partial_r(S_r g) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial g}{\partial x_k}(x+ry)y_k d\sigma_y = \frac{1}{4\pi r}\int_{\partial B}\frac{\partial}{\partial \nu_y}g(x+ry)\,d\sigma_y \\
&= \frac{1}{4\pi r}\int_B \Delta_y g(x+ry)\,dy = \frac{r}{4\pi}\int_B (\Delta g)(x+ry)\,dy, \\
\partial_r^2(S_r g) &= \frac{1}{4\pi}\int_B (\Delta g)(x+ry)\,dy + \frac{1}{4\pi}\int_B\sum_{k=1}^{3} y_k\partial_k(\Delta g)(x+ry)\,dy \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_B (\Delta g)(x+ry)\,dy + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B}(\Delta g)(x+ry)\,d\sigma_y.
\end{aligned}$$

En combinant ces relations avec (4.8), on obtient (4.7).

Soit $v(t,x) = tS_{at}u_1(x)$. En utilisant la relation (4.7), on vérifie que

$$\begin{gathered}
\partial_t^2 v = a\partial_r^2(rS_r u_1)\big|_{r=at} = a^2 t\Delta(S_r u_1)\big|_{r=at} = a^2\Delta v, \\
v(0,x) = 0, \quad \partial_t v(0,x) = (S_0 u_1)(x) = u_1(x).
\end{gathered}$$

On voit que $v(t,x)$ est solution du problème (4.1), (4.2) avec $u_0 \equiv 0$. En dérivant par rapport à t, on conclut que si $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$, alors $w(t,x) = \partial_t(tS_{at}u_0)$ vérifie les équations

$$\partial_t^2 w = a^2\Delta w, \quad w(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t w(0,x) = a^2\Delta(tS_{at}u_0)\big|_{t=0} = 0.$$

Par linéarité, on voit que la somme $u = v + w$ est solution du problème (4.1), (4.2) avec $f \equiv 0$. □

Théorème 4.4 (sans démonstration)**.** *Pour toutes fonctions $u_0, u_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ le problème* (4.1), (4.2) *possède une solution $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$.*

Pour la démonstration de ce résultat, voir § 2.4 dans [Eva02].

4.3 Estimation d'énergie et unicité

Pour toute fonction $u \in C^1(\mathbb{R}^{d+1})$, on pose

$$E_u(t,x) = \big(\partial_t u(t,x)\big)^2 + \big|\nabla u(t,x)\big|^2.$$

Théorème 4.5. *Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^{d+1})$ une solution de l'équation* (4.1)*. Alors pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ et toutes constantes $T > 0$ et $r > 0$ on a*

$$\int_{B(y,r)} E_u(T,x)\,dx \le \int_{B(y,r+at)} E_u(0,x)\,dx. \tag{4.9}$$

Démonstration. On définit le domaine

$$D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{d+1} : 0 < t < T, |x-y| \le r + a(T-t)\}.$$

Multiplions l'équation (4.1) par $2\partial_t u$ et intégrons sur D. En utilisant la formule d'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= 2\int_D (\partial_t^2 u - a^2\Delta u)\,\partial_t u\,dtdx \\
&= 2\int_D \partial_t\big((\partial_t^2 u)^2 + a^2|\nabla u|^2\big)\,dtdx - 2a^2\int_\Gamma \partial_t u\sum_{k=1}^d \nu_k\partial_k u\,d\sigma \\
&= \int\limits_{B(y,r)} E_u(T,x)\,dx - \int\limits_{B(y,r+aT)} E_u(0,x)\,dx + \int_\Gamma Q_u(t,x)\,d\sigma,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

où $\Gamma = \{(t,x)\in\mathbb{R}^{d+1} : 0 < t < T, |x-y| = r + a(T-t)\}$, $\nu = (\nu_t, \nu_1, \ldots, \nu_d)$ désigne le vecteur normal extérieur de Γ,

$$Q_u(t,x) = ((\partial_t^2 u)^2 + a^2|\nabla u|^2)\,\nu_t - 2a^2\partial_t u\sum_{k=1}^d \nu_k\partial_k u.$$

Comme

$$\nu_t = \frac{a}{1+a^2}, \quad \nu_k = \frac{x_k - y_k}{\sqrt{1+a^2}}, \quad k = 1,\ldots,d,$$

on voit que $Q_u(t,x) \geq 0$ sur Γ. En combinant cette inégalité avec (4.10), on obtient (4.9). □

Corollaire 4.6. *Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^{d+1})$ une solution du problème* (4.1), (4.2) *avec $f \equiv 0$ et $u_0 \equiv u_1 \equiv 0$. Alors $u \equiv 0$.*

Exercice 4.7. Montrer que le problème (4.1), (4.2) avec des données $f \in C^1(\mathbb{R}^{d+1})$, $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^d)$ et $u_1 \in C^1(\mathbb{R}^d)$ possède au plus une solution $u \in C^2(\mathbb{R}^{d+1})$.

4.4 Formule de Duhamel

Pour tout fonctions $u_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, on note $(Ru_1)(t,x)$ la solution du problème (4.1), (4.2) avec $f \equiv 0$ et $u_0 \equiv 0$.

Théorème 4.8. *Pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ la fonction*

$$u(t,x) = \int_0^t (Rf(s,\cdot))(t-s,x)\,ds \tag{4.11}$$

appartient à l'espace $C^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ et vérifie les équations (4.1), (4.2) *avec $u_0 \equiv u_1 \equiv 0$.*

Démonstration. Pour simplifier, nous n'allons considérer que le cas $d = 3$. Dans ce cas, on a

$$(Rf(s,\dot{}))(t-s,x) = (t-s)S_{a(t-s)}f(s,\cdot),$$

où l'opérateur S_r est défini par (4.5). Cette relation implique immédiatement que la fonction (4.11) est infiniment différentiable sur $\mathbb{R}^{d+1}$. En dérivant (4.11), on obtient

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x) &= \int_0^t \partial_t (Rf(s,\cdot))(t-s,x)\,ds,\\ \partial_t^2 u(t,x) &= f(t,x) + \int_0^t \partial_t^2 (Rf(s,\cdot))(t-s,x)\,ds,\\ \Delta u(t,x) &= \int_0^t \Delta (Rf(s,\cdot))(t-s,x)\,ds.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $u(t,x)$ vérifie les équation (4.1), (4.2) avec $f \equiv 0$ et $u_0 \equiv 0$. Ceci achève la démonstration dans le case $d = 3$. $\square$

Exercice 4.9. Utiliser les formules de d'Alembert et de Kirchhoff pour réécrire la relation (4.11) d'une manière explicite.