5 Equation de la chaleur

5.1 Existence de solution pour l'équation homogène

Considérons le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{5.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{5.2}$$

où $u_0(x)$ est une fonction donnée appartenant à l'espace $C_b(\mathbb{R}^d)$ des fonctions bornées continues. Pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$K_t(x) = (4\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Théorème 5.1. *Pour tout $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^d)$ la fonction*

$$u(t,x) = (K_t * u_0)(x) = (4\pi t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\, dy \tag{5.3}$$

appartient à l'espace $C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d) \cap C_b(\mathbb{R}_+^{d+1})$ et vérifie les équations (5.1), (5.2).

Démonstration. Il est facile à voir que $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$. De plus, pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned}
\partial_t K_t(x) &= (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \Big(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{d}{2t} \Big), \\
\partial_k K_t(x) &= -(4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \frac{x_k}{2t}, \\
\partial_k^2 K_t(x) &= (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \Big(\frac{x_k^2}{4t^2} - \frac{1}{2t} \Big),
\end{aligned}$$

d'où on conclut que u vérifie l'équation (5.1). Montrons que $u \in C_b(\mathbb{R}_+^{d+1})$. En effet, si $|u_0| \le C$, alors

$$|u(t,x)| \le (4\pi t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |u_0(y)|\, dy \le C (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|z|^2}{2}}\, dz = C.$$

Montrons enfin que $u(t,x)$ vérifie l'équation (5.2) au sens que, pour tout $R > 0$, on a

$$\lim_{t \to 0^+} u(t,x) = u_0(x) \quad \text{uniformément pour } |x| \le R.$$

Soit $\varepsilon > 0$. En faisant le changement de variable $y = x - \sqrt{2t} z$, on obtient

$$\begin{aligned}
|u(t,x) - u_0(x)| &\le (4\pi t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |u_0(y) - u_0(x)|\, dy \\
&\le (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|z|^2}{2}} |u_0(x - \sqrt{2t} z) - u_0(x)|\, dz.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

On choisit des constantes $N > 0$ et $\delta > 0$ telles que

$$(2\pi)^{-d/2} \int_{|z|\geq N} e^{-\frac{|z|^2}{2}}\, dz \leq (4 \sup |u_0|)^{-1} \varepsilon,$$

$$\sup_{|x|\leq R} |u_0(x - \sqrt{2t}z) - u_0(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour } |z| \leq N,\ 0 \leq t \leq \delta.$$

Alors l'inégalité (5.4) implique que

$$\sup_{|x|\leq R} |u(t,x) - u_0(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}(2\pi)^{-d/2} \int_{|z|\leq N} e^{-\frac{|z|^2}{2}} dz \leq \varepsilon.$$

Ceci achève la démonstration du théorème. □

Exercice 5.2. Pour tout $a > 0$, trouver une formule explicite pour la solution de l'équation

$$\partial_t u - a^2 \Delta u = 0,$$

munie de la condition initiale (5.2) avec $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^d)$. *Indication :* faire un changement de variable $x = ay$.

5.2 Formule de Duhamel

Considérons maintenant l'équation non homogène

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{5.5}$$

où f est une fonction donnée. On note $C^{1,2}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions $u(t,x)$ telles que $u, \partial_t u, \partial_k u, \partial_k \partial_l u \in C(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ pour tous $k, l = 1, \dots, d$. Les espaces $C^{1,2}(\mathbb{R}_+^{d+1})$ et $C_b^{1,2}(\mathbb{R}_+^{d+1})$ sont définis d'une manière analogue.

Théorème 5.3. *Pour tout $f \in C_b^1(\mathbb{R}_+^{d+1})$ la fonction*

$$u(t,x) = \int_0^t \big(K_{t-s} * f(s,\cdot)\big)(x)\, ds$$

appartient à l'espace $C_b^{1,2}(\mathbb{R}_+^{d+1})$ et vérifie les équations (5.5), (5.2) *avec $u_0 \equiv 0$.*

Démonstration. La fonction u peut être représentée sous la forme

$$u(t,x) = \int_0^t (4\pi s)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|y|^2}{4s}} f(t-s, x-y)\, dy\, ds. \tag{5.6}$$

Cette formule implique que $u \in C_b^1(\mathbb{R}_+^{d+1})$ et

$$\partial_t u(t,x) = \big(K_t * f(0,\cdot)\big)(x) + \int_0^t \big(K_s * (\partial_t f)(t-s,\cdot)\big)(x)\, ds, \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}\partial_k u(t,x) &= \int_0^t \big(K_s * (\partial_k f)(t-s,\cdot)\big)(x)\, ds \\ &= \int_0^t (4\pi s)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} (\partial_k f)(t-s,y)\, dy\, ds, \end{aligned} \tag{5.8}$$

où $k = 1, \ldots, d$. En dérivant la relation (5.8) par rapport à x_l et faisant le changement de variable $y = x - \sqrt{2s}z$, on obtient

$$\partial_k \partial_l u(t,x) = -(2\pi)^{-d/2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}}^d z_l (2s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{|z|^2}{2}} (\partial_k f)(t-s, x - \sqrt{2s}\, z)\, dz\, ds. \tag{5.9}$$

Nous avons montré que $u \in C_b^{1,2}(\mathbb{R}_+^{d+1})$. Vérifions les équations (5.5), (5.2). En faisant le changement de variable $y = x - \sqrt{2s}z$ dans (5.6), on obtient

$$u(t,x) = \int_0^t (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|z|^2}{zs}} f(t-s, x - \sqrt{2s}z)\, dz\, ds.$$

Si $|f| \leq C$, alors

$$|u(t,x)| \leq C\,(2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|z|^2}{zs}} dz\, ds = C\,t \to 0 \quad \text{quand } t \to 0^+.$$

De plus, les relations (5.7) et (5.9) impliquent que

$$(\partial_t - \Delta) u(t,x) \to f(0,x) \quad \text{quand } t \to 0^+.$$

En combinant cette observation avec la relation

$$u(t+\tau, x) = \big(K_\tau * u(t,\cdot)\big)(x) + \int_0^\tau \big(K_{\tau-s} * f(t+s,\cdot)\big)(x)\, ds, \tag{5.10}$$

on démontre que l'équation (5.5) est vérifiée pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$. □

Exercice 5.4. Vérifier que $K_{t+s}(x) = (K_s * K_t)(x)$. Utiliser cette relation pour démontrer (5.10).

5.3 Principe du maximum et unicité

Théorème 5.5. *Soit $u \in C^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d) \cap C_b(\mathbb{R}_+^{d+1})$ une fonction vérifiant l'inégalité*

$$\partial_t u - \Delta u \leq 0 \quad \textit{pour } t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Alors

$$\sup_{(t,x) \in \mathbb{R}_+^{d+1}} u(t,x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} u(0,x).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $T > 0$ on a

$$\sup_{(t,x) \in D_T} u(t,x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} u(0,x),$$

où $D_T = \{(t,x) : 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^d\}$. Pour $\varepsilon > 0$ introduisons la fonction

$$u_\varepsilon(t,x) = u(t,x) - \varepsilon(4dt + |x|^2).$$

Alors $u_\varepsilon \in C^2(]0,T[\times\mathbb{R}^d) \cap C_b([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ et

$$\sup_{0\le t\le T} u_\varepsilon(t,x) \to -\infty \quad \text{quand } |x|\to\infty.$$

Donc, il existe $(t_0,x_0)\in D_T$ tel que

$$\sup_{(t,x)\in D_T} u_\varepsilon(t,x) = u_\varepsilon(t_0,x_0).$$

Montrons que $t_0=0$. En effet, si $t_0>0$, alors

$$\partial_t u_\varepsilon(t_0,x_0)\ge 0, \quad \partial_k^2 u_\varepsilon(t_0,x_0)\le 0, \quad k=1,\dots,d.$$

Il s'ensuit que

$$\partial_t u_\varepsilon(t_0,x_0) - \Delta u_\varepsilon(t_0,x_0) \ge 0.$$

D'autre part,

$$(\partial_t-\Delta)u_\varepsilon = (\partial_t-\Delta)u - \varepsilon(\partial_t-\Delta)(4dt+|x|^2) \le -2d\varepsilon < 0.$$

La contradiction obtenue prouve que $t_0=0$. Nous avons établi l'inégalité

$$u_\varepsilon(t,x) \le u_\varepsilon(0,x_0) \le \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\bigl(u(0,x)-\varepsilon|x|^2\bigr) \le \sup_{x\in\mathbb{R}^d} u(0,x).$$

En passant à la limite quand $\varepsilon\to 0^+$, on obtient le résultat cherché. □

Corollaire 5.6. *Pour toutes fonctions $u_0\in C_b(\mathbb{R}^d)$ et $f\in C_b^1(\mathbb{R}_+^{d+1})$ le problème* (5.1), (5.2) *possède une unique solution $u\in C^{1,2}(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^d)\cap C_b(\mathbb{R}_+^{d+1})$.*

Exercice 5.7. Soit $Q_T=\{(t,x) : 0<t<T, x\in D\}$, où $D\subset\mathbb{R}^d$ désigne un domaine borné à bord régulier, et $u(t,x)$ une fonction de classe $C^2(Q_T)\cap C(\overline{Q}_T)$ vérifiant l'inégalité

$$\partial_t u - \Delta u \le 0 \quad \text{pour } (t,x)\in Q_T.$$

Montrer que

$$\sup_{(t,x)\in Q_T} u(t,x) = \sup_{x\in D} u(0,x).$$