6 Appendice : intégrale de surface

6.1 Définition et exemples

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ une surface définie par une fonction régulière $g : \overline{U} \to \mathbb{R}^d$, où $U \subset \mathbb{R}_y^{d-1}$ est un domaine borné à bord régulier, telle que les vecteurs $\partial_1 g, \dots, \partial_{d-1} g$ sont linéairement indépendants. Soit $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors on définit l'intégrale de f sur Σ par la formule

$$\int_\Sigma f(x)\,d\sigma = \int_{\overline{U}} f(g(y))G(y)\,dy,$$

où G désigne le déterminant de Gram :

$$G(y) = \big(\det\{(\partial_i g, \partial_j g)\}_{i,j=1}^{d-1}\big)^{1/2}. \tag{6.1}$$

Si Σ est la réunion d'un nombre fini de surfaces Σ_k définies par des fonctions régulières g_k et $f \in C(\Sigma)$, alors on pose

$$\int_\Sigma f(x)\,d\sigma = \sum_k \int_{\Sigma_k} f(x)\,d\sigma.$$

La proposition suivante est un résultat standard de la géométrie différentielle ; voir, par exemple, le livre [Laf96].

Proposition 6.1 (sans démonstration)**.** *La valeur de l'intégrale de surface ne dépend pas du choix de paramétrisation.*

Exemples 6.2. **(a)** Soit $d = 2$ et $\Sigma = \{g(y) = (y, 0), a \le y \le b\}$. Alors pour toute fonction $f \in C(\Sigma)$, on a

$$\int_\Sigma f d\sigma = \int_a^b f(y,0)\,dy.$$

Plus généralement, si $\Sigma = \{g(y) = (y, 0), y \in \overline{U}\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$, où $U \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine borné à bord régulier, alors

$$\int_\Sigma f d\sigma = \int_U f(y,0)\,dy.$$

Donc, la définition de l'intégrale de surface est consistante avec l'intégrale de Riemann.

(b) Soit $d = 2$ et $\Sigma = \{g(y), a \le y \le b\}$ une courbe régulière. Alors

$$\int_\Sigma f d\sigma = \int_a^b f\big(g(y)\big)\big(\dot{g}_1^2(y) + \dot{g}_2^2(y)\big)^{1/2}\,dy.$$

En particulier, pour $f \equiv 1$ on obtient la longueur de Σ.

(c) Soit $S_R = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = R\}$ la sphère de rayon R et de centre zéro. Alors $S_R = S_R^+ \cup S_R^-$, où $S_R^\pm = \{x \in S_R : \pm x_d \geq 0\}$, et pour $f \in C(S_R)$ on a

$$\int_{S_R} f d\sigma = \int_{S_R+} f d\sigma + \int_{S_R^-} f d\sigma.$$

D'autre part, toute fonction $f \in C(S_R)$ peut être considérée comme une fonction sur la sphère unité S_1 :

$$\tilde{f}(\omega) = f(R\omega), \quad \omega \in S_1.$$

Si $g_\pm : U^\pm \to S_R^\pm$ est une paramétrisation de $S_R^\pm$, alors $\tilde{g}_\pm = R^{-1} g_\pm$ est une paramétrisation de $S_1^\pm$. On conclut que

$$\int_{S_R^\pm} f\, d\sigma = \int_{U^\pm} f(g_\pm(y)) G_\pm(y)\, dy = R^{d-1} \int_{U^\pm} \tilde{f}(\tilde{g}_\pm(y)) \tilde{G}_\pm(y)\, dy,$$

où $G_\pm$ et $\tilde{G}_\pm$ désignent la fonction (6.1) avec g remplacé par $g_\pm$ et $\tilde{g}_\pm$ respectivement. Donc,

$$\int_{S_R} f\, d\sigma = R^{d-1} \int_{S_1} \tilde{f}\, d\sigma. \tag{6.2}$$

6.2 Démonstration de la formule d'intégration par parties

On montre la formule (3.1) dans le cas $d = 2$ pour des domaines de la forme

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a < x_1 < b,\ c(x_1) < x_2 < d(x_1)\},$$

où $c, d \in C^1([a, b])$. Considérons, par exemple, le cas $j = 1$. On a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u \partial_1 v\, dx &= \int_a^b \left(\int_{c(x_1)}^{d(x_1)} u \partial_1 v\, dx_2 \right) dx_1 \\
&= \int_a^b \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_{c(x_1)}^{d(x_1)} uv\, dx_2 \right) - \int_{c(x_1)}^{d(x_1)} \partial_1 uv\, dx_2 \right. \\
&\qquad \left. - d'(x_1)(uv)(x_1, d(x_1)) + c'(x_1)(uv)(x_1, c(x_1)) \right\} dx_1.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_{c(x_1)}^{d(x_1)} uv\, dx_2 \right) dx_1 &= \int_{c(b)}^{d(b)} (uv)(b, x_2)\, dx_2 - \int_{c(a)}^{d(a)} (uv)(a, x_2)\, dx_2 \\
&= \int_{\Gamma_1} uv\nu_1 d\sigma,
\end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\int_a^b \big(d'(x_1)(uv)(x_1, d(x_1)) - c'(x_1)(uv)(x_1, c(x_1)) \big)\, dx_1 = - \int_{\Gamma_2} uv\nu_1 d\sigma, \tag{6.5}$$

où $\Gamma_1 = \{x \in \partial\Omega : x_1 = a \text{ ou } b\}$ et $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$. En reportant les relations (6.4) et (6.5) dans (6.3), on obtient (3.1) avec $j = 1$.

Exercice 6.3. Considérer le cas $j = 2$.