

# Analyse Fonctionnelle et Convexe

Armen Shirikyan

Notes et exercices du cours enseigné aux étudiants de la première année de l'ENSAE

## Table des matières

<b>Bibliographie</b>	<b>2</b>
<b>1 Espaces de Hilbert</b>	<b>3</b>
1.1 Définitions et exemples . . . . .	3
1.2 Projecteurs et bases hilbertiennes . . . . .	5
1.3 Complété d'un espace pré-hilbertien . . . . .	7
1.4 Théorème de Riesz . . . . .	9
1.5 Produit tensoriel des espaces de Hilbert . . . . .	11
<b>2 Espaces de Banach</b>	<b>13</b>
2.1 Théorème de Baire . . . . .	13
2.2 Théorème de Banach–Schauder de l'application ouverte . . . . .	14
2.3 Théorème du graphe fermé . . . . .	15
2.4 Théorème de Banach–Steinhaus . . . . .	16
2.5 Théorème de Hahn–Banach . . . . .	18
2.6 Dualité dans les espaces de Banach . . . . .	21
<b>3 Espaces fonctionnels</b>	<b>23</b>
3.1 Topologie d'un espace métrique . . . . .	23
3.2 Théorème de Weierstrass . . . . .	25
3.3 Théorème de Stone–Weierstrass . . . . .	26
3.4 Théorème de Arzelà–Ascoli . . . . .	28
3.5 Compacité dans les espaces $L^p$ . . . . .	30
<b>4 Espaces topologiques vectoriels</b>	<b>33</b>
4.1 Espaces topologiques . . . . .	33
4.2 Espaces vectoriels topologiques . . . . .	34
4.3 Propriétés de séparation . . . . .	37
4.4 Espaces de dimension finie . . . . .	39
4.5 Applications linéaires . . . . .	40
4.6 Semi-normes et convexité locale . . . . .	42
4.7 Espaces produits et espaces quotients . . . . .	45
4.8 Exemples . . . . .	47

<b>Exercices</b>	<b>49</b>
<b>Solutions et indications</b>	<b>64</b>
<b>Index</b>	<b>83</b>

## **Bibliographie**

- [Cer10] J. Cerdà, *Linear Functional Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 116, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [RS80] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I. Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1980.
- [Rud73] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [Yos95] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.