1 Espaces de Hilbert

Nous étudions dans ce chapitre quelques notions de base et des propriétés élémentaires des espaces de Hilbert. Pour simplifier la présentation, nous n'allons considérer que le cas complexe.

1.1 Définitions et exemples

Soit H un espace vectoriel complexe et (u, v) une fonction des variables $u, v \in H$ à valeurs complexes.

Définition 1.1. On dit que $(\cdot, \cdot)$ est un *produit scalaire* sur H si les propriétés suivantes sont vérifiées pour tous $u, v, w \in H$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$(\lambda u, v) = \bar{\lambda}(u, v), \quad (u + v, w) = (u, w) + (v, w), \quad (u, v) = \overline{(v, u)}, \tag{1.1}$$

$$(u, u) \geq 0, \quad (u, u) = 0 \text{ si et seulement si } u = 0. \tag{1.2}$$

Lemme 1.2. *Soit H un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ et $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$. Alors $\|\cdot\|$ est une* norme *sur H, c'est-à-dire, une fonction positive vérifiant les propriétés suivantes pour tous $u, v \in H$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:*

$$\|u\| = 0 \textit{ si et seulement si } u = 0, \tag{1.3}$$

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\| \, , \tag{1.4}$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \tag{1.5}$$

De plus, on a l'inégalité de Cauchy–Schwarz *:*

$$|(u, v)| \leq \|u\| \, \|v\| \quad \textit{pour tous } u, v \in H. \tag{1.6}$$

Cette inégalité est strict si et seulement si les vecteurs u, v ne sont pas parallels.

Démonstration. Montrons d'abord l'inégalité (1.6). Comme le produit scalaire est positif sur la diagonale, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$0 \leq \|u + tv\|^2 = \|u\|^2 + 2t \operatorname{Re}(u, v) + t^2 \|v\|^2,$$

d'où on conclut que

$$|\operatorname{Re}(u, v)|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0.$$

En remplaçant dans cette inégalité v par $e^{i\varphi} v$, où $\varphi \in \mathbb{R}$ est tel que $e^{i\varphi}(u, v) \in \mathbb{R}$, on obtient (1.6). La démonstration donnée implique qu'on a une égalité si et seulement si u, v sont parallels.

Montrons maintenant que $\|\cdot\|$ est une norme. La propriété (1.3) est une consequence immédiate de (1.2), et la relation (1.3) est évidente. Vérifions l'inégalité (1.5) (appelée *inégalité triangulaire*):

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(u, v) \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \, \|v\| = \big(\|u\| + \|v\|\big)^2. \end{aligned}$$

□

Il est facile à voir que si une norme $\|\cdot\|$ est engendrée par un produit scalaire, alors elle vérifie l'*égalité de parallélogramme*:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad \text{pour tous } u, v \in H. \tag{1.7}$$

On peut montrer que c'est aussi une condition suffisante. De plus, l'inégalité (1.6) implique qu'un produit scalaire est une fonction continue sur $H \times H$.

Définition 1.3. Un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire est appelée un *espace pré-hilbertien*. Si, en plus, H est complet par rapport à la norme engendrée par le produit scalaire (c'est-à-dire, toute suite de Cauchy possède une limite), alors on appelle H un *espace de Hilbert*.

Exemple 1.4. Soit $C([a,b];\mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ muni du produit scalaire

$$(f,g) = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Alors $C([a,b];\mathbb{C})$ est un espace pré-hilbertien. L'espace $L^2(a,b;\mathbb{C})$ des fonctions boréliennes $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ de carré intégrable est un espace de Hilbert par rapport au même produit scalaire. On peut considérer aussi l'espace $L^2([a,b],\mu)$, où μ est une mesure σ-finie sur $[a,b]$. En particulier, l'espace vectoriel

$$\ell_2 = \Big\{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots) : x_j \in \mathbb{C},\ \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty \Big\}$$

muni du produit scalaire

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{x}_j y_j$$

est un espace de Hilbert.

Définition 1.5. Un espace de Hilbert H est dit *séparable* si il existe une suite dense dans H.

Par exemple, ℓ_2 est un espace séparable. Dans la suite, nous n'allons considérer que des espaces de Hilbert séparables.

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. La *somme directe* $H_1 \oplus H_2$ est définie comme l'ensemble des paires $[u_1, u_2]$ tels que $u_i \in H_i$ pour $i = 1, 2$. Les opérations

$$[u_1, u_2] + [v_1, v_2] = [u_1 + v_1, u_2 + v_2], \quad \lambda[u_1, u_2] = [\lambda u_1, \lambda u_2]$$

définissent une structure vectorielle sur $H_1 \oplus H_2$. De plus, la forme bilinéaire

$$\big([u_1, u_2], [v_1, v_2]\big) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2)$$

est un produit scalaire sur $H_1 \oplus H_2$. Il est facile à voir que c'est un espace de Hilbert. On peut définir aussi la somme directe d'une famille dénombrable $\{H_k\}$. Dans ce cas, on pose

$$\bigoplus_{k=1}^{\infty} H_k = \Big\{ \boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots) : u_k \in H_k,\ \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_{H_k}^2 < \infty \Big\},$$
$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k, v_k)_{H_k}.$$

On peut montrer que c'est un espace de Hilbert, et si, en plus, H_k sont des espaces séparables, alors $\oplus_k H_k$ l'est aussi.

Exemple 1.6. La somme directe de deux copies de $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ est égale à

$$L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2 \mid f \text{ borélienne },|f|^2 \in L^1(\mathbb{R})\}.$$

La somme directe d'une famille dénombrable de $L^2(\mathbb{R})$ est égale à

$$L^2(\mathbb{R}, \ell_2) = \big\{f : \mathbb{R} \to \ell_2 \mid f \text{ borélienne },\|f\|_{\ell_2}^2 \in L^1(\mathbb{R})\big\}.$$

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $A : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire. On dit que A est *continu* si pour tout point $u \in H_1$ et toute suite $(u_n) \subset H_1$ telle que $u_n \to u$ dans H_1 la suite (Au_n) converge vers Au dans H_2. Il est facile à voir que A est continue si A est continue au point zéro. Cette dernière condition est vérifiée si et seulement si A est *borné* :

$$\|A\|_{\mathcal{L}} := \sup_{\|u\|_{H_1} \le 1} \|Au\|_{H_2} < \infty.$$

L'ensemble de tous les opérateurs continus de H_1 dans H_2 est noté $\mathcal{L}(H_1, H_2)$. On dit que $A : H \to H$ est un opérateur *auto-adjoint* si

$$(Au, v) = (u, A^* v) \quad \text{pour tous } u, v \in H.$$

1.2 Projecteurs et bases hilbertiennes

Théorème 1.7. *Soit H un espace de Hilbert et $H_0 \subset H$ un sous-espace fermé. Alors pour tout $u \in H$ il existe un unique élément $u_0 \in H_0$ tel que*

$$\|u - u_0\| = \mathrm{dist}(u, H_0) := \inf_{v \in H_0} \|u - v\|. \tag{1.8}$$

De plus, u_0 est l'unique élément de H_0 vérifiant la condition

$$(u - u_0, v) = 0 \quad \textit{pour tout } v \in H_0. \tag{1.9}$$

L'élément $u_0 \in H_0$ est appelé la *projection orthogonale de u sur H_0*. Le théorème 1.7 implique immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 1.8. *Soit H_0 un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H et $H_0^\perp$ son* complémentaire orthogonal, *c'est-à-dire, l'ensemble des vecteurs $u \in H$ tels que $(u, v) = 0$ pour tout $v \in H_0$. Alors H est représentable comme la somme directe $H = H_0 \oplus H_0^\perp$. De plus, l'opérateur P qui envoie un vecteur $u \in H$ à sa projection orthogonale sur H_0 est linéaire et vérifie les propriétés suivantes:*

$$P^2 = P, \quad \|P\|_{\mathcal{L}(H)} = 1.$$

On appelle P le projecteur orthogonal sur H_0.

Démonstration du théorème. Soit $\{v_n\} \subset H_0$ une suite telle que

$$\|u - v_n\| \to d := \operatorname{dist}(u, H_0) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

D'après l'égalité de parallélogramme appliquée aux vecteurs $u - v_n$ et $u - v_m$ on a

$$\begin{aligned}\|v_n - v_m\|^2 &= 2\|u - v_n\|^2 + 2\|u - v_m\|^2 - 4\big\|u - \tfrac{v_n + v_m}{2}\big\|^2 \\ &\leq 2\|u - v_n\|^2 + 2\|u - v_m\|^2 - 4d^2 \to 0\end{aligned}$$

quand $m, n \to \infty$. On conclut que $\{v_n\}$ est une suite de Cauchy. Il est facile à vérifier que sa limite u_0 satisfait toutes les propriétés requises. □

Définition 1.9. Soit H un espace de Hilbert séparable. Une suite de vecteurs $\{e_j\} \subset H$ est appelée une *base orthonormée de H* si elle possède les propriétés suivantes:

(a) $(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$ et $\|e_j\| = 1$ pour tout $j \geq 1$;

(b) tout vecteur $u \in H$ est représentable sous la forme

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} u_j e_j, \tag{1.10}$$

où la série converge pour la norme de H.

Il est facile à voir que si $\{e_j\} \subset H$ est une base orthonormée, alors les vecteur e_j sont linéairement indépendants, et dans la série (1.10) les coefficients sont calculés par $u_j = (e_j, u)$. On dit qu'une suite $\{e_j\} \subset H$ est un *système orthonormé* si elle vérifié la propriété (a) de la définition 1.9.

Proposition 1.10. *Soit $\{e_j\} \subset H$ un système orthonormé. Alors pour tout $u \in H$ on a* l'inégalité de Bessel *:*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(e_j, u)|^2 \leq \|u\|^2. \tag{1.11}$$

De plus, $\{e_j\}$ est une base orthonormée si et seulement si on a la relation de Parseval :

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(e_j, u)|^2 = \|u\|^2. \tag{1.12}$$

Démonstration. Il est facile à vérifier que

$$0 \leq \left\| u - \sum_{j=1}^{N} (e_j, u) e_j \right\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{N} |(e_j, u)|^2,$$

d'où, en passant à la limite quand $N \to \infty$, on obtient l'inégalité de Bessel (1.11).

Si $\{e_j\}$ est une base orthonormée, alors on a la représentation (1.10). En prenant la norme au carré, on obtient la relation (1.12). Réciproquement, supposons que la relation de Parseval a lieu. Alors

$$\left\| u - \sum_{j=1}^{\infty} (e_j, u) e_j \right\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{\infty} |(e_j, u)|^2 = 0,$$

d'où on conclut que la relation (1.10) a lieu. □

L'existence d'une projection orthogonale permet de construire une base orthonormée pour tout espace de Hilbert séparable et de montrer que tous les espaces de Hilbert séparables sont isométriques.

Théorème 1.11. *Soit H un espace de Hilbert séparable. Alors elle possède une base orthonormée. De plus, si H_1 et H_2 sont deux espaces de Hilbert séparables, alors il existe une bijection linéaire $V : H_1 \to H_2$ telle que*

$$\|Vu\|_{H_2} = \|u\|_{H_1} \quad \textit{pour tout } u \in H_1.$$

Démonstration. Pour tout espace de Hilbert séparable H, il existe une suite $\{f_j\} \subset H$ de vecteurs linéairement indépendants telle que les combinaisons linéaire de f_j sont denses. On définit un système orthonormé $\{e_j\}$ en utilisant le *procédé d'orthogonalisation de Gramm–Schmidt* :

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}, \qquad e_j = \frac{f_j - P_{j-1} f_j}{\|f_j - P_{j-1} f_j\|}, \quad j \geq 2,$$

où P_j désigne le projecteur orthogonal sur l'espace engendré par les vecteurs $f_1, \dots, f_j$. En utilisant le fait que l'espace vectoriel engendré par $e_1, \dots, e_j$ est confondu avec celui engendré par $f_1, \dots, f_j$, on montre que $\{e_j\}$ est une base orthonormée.

Soient maintenant H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert séparables avec des bases orthonormées $\{e_j\}$ et $\{f_j\}$. On définit un opérateur linéaire $V : H_1 \to H_2$ par $Ve_j = f_j$ pour tout $j \geq 1$. Il est facile à vérifier que V satisfait toutes les propriétés requises. □

1.3 Complété d'un espace pré-hilbertien

Théorème 1.12. *Soit H_0 un espace pré-hilbertien séparable. Alors il existe un espace de Hilbert H et une application $J : H_0 \to H$ tel que $J(H_0)$ est dense dans H et $(u, v)_{H_0} = (Ju, Jv)_H$ pour tous $u, v \in H_0$.*

On appelle H le *complété* de H_0. Le fait que J préserve le produit scalaire implique que J préserve aussi la norme. On conclut que J est une isométrie de l'espace H_0 sur son image $J(H_0)$. Très souvent on identifie l'espace H_0 avec $J(H_0)$, en le considérant comme un sous-espace de H.

Démonstration. Soit $\{e_j\}$ un système orthonormé dans H_0 tel que l'espace vectoriel engendré par les combinaisons linéaires de $\{e_j\}$ est dense. On note H' l'*espace dual* de H_0, c'est-à-dire, l'espace des fonctionnelles continues sur H_0 muni de la norme

$$\|f\|_{H_0'} = \sup_{\|u\|\le 1} |f(u)|.$$

Alors H_0' est un espace de Hilbert séparable par rapport au produit scalaire

$$(f,g) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{f(e_j)}\, g(e_j),$$

qui engendre la norme $\|\cdot\|_{H_0'}$. Soit H l'espace dual de H_0'. Alors H est aussi un espace de Hilbert. On note $J : H_0 \to H$ l'application linéaire qui envoie un vecteur $u \in H_0$ à la fonctionnelle $F_u \in H$ définie par $F_u(f) = f(u)$. Montrons que J est une application bijective de H_0 sur $J(H_0)$ qui préserve le produit scalaire. En effet, il est facile à vérifier que

$$\|J(u)\|_H = \sup_{\|f\|_{H_0'}\le 1} |F_u(f)| = \|u\|_{H_0} \quad \text{pour tout } u \in H_0.$$

Cette relation implique, en particulier, que le noyau de J est trivial. En plus, tenant compte de l'identité de polarisation (voir la feuille d'exercices), on conclut que J préserve le produit scalaire.

Il nous reste à montrer que $J(H_0)$ est dense dans H. Supposons qu'il existe $F \in H$ tel que $(F, J(u))_H = 0$ pour tout $u \in H_0$. Si $\{f_j\}$ est une base orthonormée de H_0', alors

$$(F, J(u))_H = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{F(f_j)}\, J(u)(f_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{F(f_j)}\, f_j(u) = \tilde f(u) = 0,$$

où $\tilde f = \sum_j \overline{F(f_j)}\, f_j$. Comme cette relation est vraie pour tout $u \in H_0$, on conclut que $\tilde f = 0$ et donc $F = 0$. Ceci achève la démonstration du théorème. $\square$

Exemple 1.13. Soit c_0 l'espace des suites dont tous les éléments sont nuls à partir d'un certain rang. On munit c_0 du produit scalaire de l'espace ℓ_2. Alors c_0 est un espace pré-hilbertien dont le complété est confondu avec ℓ_2. De même, le complété de l'espace $C([a,b];\mathbb{C})$ par rapport au produit scalaire L^2 est confondu avec $L^2(a,b;\mathbb{C})$.

Exemple 1.14 (Séries de Fourier). Soit $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^2$ le cercle de rayon 1 et de centre zéro. Rappelons que les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{S})$ sont définies par

$$c_k(f) = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Le théorème de Weierstrass (§ 3.2) implique que les fonctions trigonométriques forment un système complet dans $L^2(\mathbb{S})$. Il s'ensuit que $\{(2\pi)^{-1}e^{iix}, k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée, et l'on voit que la série de Fourier

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx}$$

de toute fonction $f \in L^2(\mathbb{S})$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{S})$.

Supposons maintenant que $f \in C^1(\mathbb{S})$. Alors en intégrant par parties on montre que

$$|c_k(f)| \le |k^{-1}c_k(f')| \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}_*. \tag{1.13}$$

On établit maintenant des estimations pour les sommes partielles

$$(S_{m,n}f)(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=m}^{n} c_k(f)e^{ikx}.$$

En utilisant (1.13), la relation de Parseval et l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
\big|(S_{m,n}f)(x)\big| &\le \frac{1}{2\pi}\sum_{k=m}^{n}|k^{-1}c_k(f')| \le C\,\|f'\|_{L^2(\mathbb{S})} \\
\big|(S_{m,n}f)(x) - (S_{m,n}f)(x+y)\big| &\le \frac{1}{2\pi}\sum_{k=m}^{n}|k^{-1}c_k(f')|\,|e^{iky}-1| \\
&\le C\|f'\|_{L^2}\left(\sum_{k=m}^{n}k^{-2}|e^{iky}-1|^2\right)^{1/2} \\
&\le \omega(y)\|f'\|_{L^2},
\end{aligned}$$

où $\omega(y) \to 0$ quand $y \to 0$. Le résultat suivant est établit dans § 3 :

- Soit $\{f_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\} \subset C^1(\mathbb{S})$ une famille bornée de fonctions telle que

  $$\sup_{\alpha\in\mathcal{A}}\|f'_\alpha\|_{C(\mathbb{S})} < \infty.$$

  Alors pour toute suite $\{\alpha_n\} \subset \mathcal{A}$ il existe une suite extraite $\{\alpha'_n\} \subset \{\alpha_n\}$ telle que $\{f_{\alpha'_n}\}$ converge dans $C(\mathbb{S})$.

On conclut que pour toutes suites $m_j \to -\infty$ et $n_j \to +\infty$, il existes des suites extraites m'_j et n'_j telles que $S_{m'_j,n'_j}$ converge vers une limite dans $C(\mathbb{S})$. Par l'unicité de la limite dans $L^2(\mathbb{S})$, il s'ensuit que $\{S_{m,n}\}$ converge vers f dans $C(\mathbb{S})$.

1.4 Théorème de Riesz

Soit H un espace de Hilbert et H' son espace dual. Il est facile à voir que pour tout $u \in H$ l'application $f_u : v \mapsto (v, u)$ appartient à H' et que $\|f_u\|_{H'} =$

$\|u\|_H$. Le théorème suivant montre qu'il n'y a pas d'autres éléments dans H' et permet d'identifier tout espace de Hilbert avec son dual. Ce résultat implique, en particulier, que le dual de tout espace de Hilbert séparable l'est aussi.

Théorème 1.15. *Pour tout élément $f \in H'$ il existe un unique vecteur $u_f \in H$ tel que*

$$f(v) = (u_f, v) \quad \textit{pour tout } v \in H. \tag{1.14}$$

De plus, l'application $L : H' \to H$ qui envoie f à u_f est anti-linéaire et vérifie la relation

$$\|Lf\|_H = \|f\|_{H'} \quad \textit{pour tout } f \in H'. \tag{1.15}$$

Démonstration. Soit $H_0 \subset H$ le sous-espace fermé sur lequel la fonctionnelle f est nulle. Si H_0 est confondue avec H, alors $f = 0$, et on pose $u_f = 0$. Si H_0 est un sous-espace propre, alors on note u_0 un élément de norme 1 dans le complémentaire orthogonal de H_0. On cherche u_f sous la forme $u_f = cu_0$. Si (1.14) a lieu, alors $f(u_f) = \|u_f\|^2$, d'où on conclut que $c = \overline{f(u_0)}$.

Montrons que (1.14) a lieu avec $u_f = \overline{f(u_0)}u_0$ et que $\|u_f\|_H = \|f\|_{H'}$. En effet, tout vecteur $v \in H$ est représentable sous la forme $v = (u_0, v)u_0 + v'$, où $v' \in H_0$. Alors

$$f(v) = f\big((u_0, v)u_0 + v'\big) = \big(\overline{f(u_0)}u_0, b\big) = (u_f, v).$$

De plus, on a

$$|f(u_0)| = |(u_f, u_0)| = \|u_f\|, \quad |f(v)| = |(u_f, v)| \le \|u_f\| \, \|v\|.$$

Ceci achève la démonstration du théorème. □

Rappelons que l'opérateur adjoint d'un opérateur borné $A : H_1 \to H_2$ est défini par

$$(A^*f)(u) = f(Au) \quad \text{pour } f \in H_2',\ u \in H_1.$$

Le théorème de Riesz permet de considérer A^* comme un opérateur de H_2 dans H_1. Plus précisément, on considère l'opérateur $\tilde{A}^* = L_1 A^* L_2^{-1}$, où L_i désigne l'opérateur construit dans le théorème 1.15 pour l'espace H_i. Alors

$$(\tilde{A}^* v, u) = (L_1 A^* f_v, u) = A^* f_v(u) = f_v(Au) = (v, Au), \tag{1.16}$$

où $f_v : H_2 \to \mathbb{C}$ désigne la fonctionnelle associée à v. Dans la suite, on écrit A^* au lieu de $\tilde{A}^*$. Remarquons qu'on pourrait définir $A^* : H_2 \to H_1$ comme l'unique opérateur vérifiant la relation

$$(A^* v, u) = (v, Au) \quad \text{pour tous } v \in H_2,\ u \in H_1.$$

1.5 Produit tensoriel des espaces de Hilbert

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Pour $u_1 \in H_1$ et $u_2 \in H_2$, on note $u_1 \otimes u_2 : H_1 \oplus H_2 \to \mathbb{C}$ la forme bilinéaire définie par

$$(u_1 \otimes u_2)[\varphi_1, \varphi_2] = (u_1, \varphi_1)\,(u_2, \varphi_2).$$

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel engendré par ces formes. On définie une forme hermitienne sur $\mathcal{E}$ par

$$(u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2) = (u_1, v_1)\,(u_2, v_2). \tag{1.17}$$

Proposition 1.16. *La forme hermitienne donnée par* (1.17) *est bien définie, et c'est un produit scalaire sur* $\mathcal{E}$.

Démonstration. On doit montrer que le produit scalaire d'éléments $\eta, \zeta \in \mathcal{E}$ ne dépend pas de la représentation de ces éléments. Pour cela, il suffit de vérifier que si $\eta = 0$, alors pour tout

$$\zeta = \sum_{k=1}^{n} c_k v_1^k \otimes v_2^k \tag{1.18}$$

on a $(\eta, \zeta) = 0$. Comme η est une forme bilinéaire zéro, on a

$$(\eta, \zeta) = \sum_{k=1}^{n} c_k (\eta, v_1^k \otimes v_2^k) = \sum_{k=1}^{n} c_k \eta[v_1^k, v_2^k] = 0.$$

Montrons maintenant que c'est produit scalaire sur $\mathcal{E}$. Si

$$\eta = \sum_{l=1}^{m} b_l u_1^l \otimes u_2^l$$

alors on peut écrire

$$(\eta, \zeta) = \sum_{k,l} \bar{b}_l c_k (u_1^l \otimes u_2^l, v_1^k \otimes v_2^k) = \sum_{k,l} \bar{b}_l c_k (u_1^l, v_1^k)\,(u_2^l, v_2^k).$$

Cette formule implique toutes les propriété requises. □

Définition 1.17. Le complété de $\mathcal{E}$, noté $H_1 \otimes H_2$, est appelé le *produit tensoriel* des espaces H_1 et H_2.

Proposition 1.18. *Soient* $\{e_j\}$ *et* $\{f_k\}$ *des bases orthonormées dans* H_1 *et* H_2 *respectivement. Alors* $\{e_j \otimes f_k\}$ *est une base orthonormée dans* $H_1 \otimes H_2$.

Démonstration. Il est claire que $\{e_j \otimes f_k\}$ est un système orthonormée. Il suffit donc de vérifier que c'est un système complet. Cette propriété sera établie si on montre que tout élément $u \otimes v$ appartient à l'espace vectoriel fermé engendré par $\{e_j \otimes f_k\}$. On écrit

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} b_j e_j, \quad v = \sum_{l=1}^{\infty} c_k f_k.$$

Comme $\sum_{j,k} |b_j|^2 |c_k|^2 < \infty$, la série

$$\sum_{j,k} c_j b_k e_j \otimes f_k$$

définit un élément de $H_1 \otimes H_2$. Il est facile à vérifier qu'il est égal à $u \otimes v$. $\square$

Exemples 1.19. **(a)** Le produit tensoriel de $\mathbb{C}^m$ et $\mathbb{C}^n$ est confondue avec $\mathbb{C}^{mn}$.

(b) Soit $H_1 = L^2(\mathbb{R})$ et $H_2 = \mathbb{C}^n$. Alors $H_1 \otimes H_2$ est isométrique à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$.

(c) Soit $H_1 = L^2(\mathbb{R}^m)$ et $H_2 = L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe une isométrie naturelle de $H_1 \otimes H_2$ sur $L^2(\mathbb{R}^{m+n})$.