2 Espaces de Banach

Dans ce chapitre, nous étudions quelques théorèmes fondamentaux concernant les espaces de Banach. Comme la notion d'un espace de Hilbert est un cas particulier de celle d'un espace de Banach, tous les résultats établis ici restent vrais pour les espaces de Hilbert.

2.1 Théorème de Baire

Soit X un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. Rappelons qu'une norme est une fonction sur X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés (1.3)–(1.5).

Définition 2.1. On dit que X est un *espace de Banach* si X est complet par rapport à la norme $\|\cdot\|$, c'est-à-dire, toute suite de Cauchy possède une limite.

Pour $u \in X$ et $r > 0$, on définit la *boule ouverte*

$$B_X(u,r) = \{v \in X : \|v-u\|_X < r\}.$$

Un ensemble $A \subset X$ est dit *ouvert* si pour tout point $u \in X$ il existe $r_u > 0$ tel que $B_X(u,r_u) \subset A$. Un ensemble $A \subset X$ est dit *fermé* si son complémentaire est ouvert. Le résultat suivant n'utilise que la complétude d'un sous-ensemble fermé dans un espace de Banach et reste vrai pour tout espace métrique complet (voir § 4 pour lé définition d'un espace métrique).

Théorème 2.2. *Soit X un espace de Banach et $Y \subset X$ un fermé inclut dans la réunion d'une suite de sous-ensembles $X_n \subset X$. Alors il existe un entier $m \geq 1$ et une boule non dégénérée $B_Y(u,r)$ qui est inclue dans l'adhérence de X_m.*

Démonstration. Si la conclusion du théorème est fausse, alors on construit par récurrence une suite décroissante de boules $B_Y(u_n,r_n)$ telle que $r_n \leq 2^{-n}$ et $B_Y(u_n,r_n) \cap X_n = \varnothing$ pour tout $n \geq 1$. La suite $(u_n) \subset X$ est de Cauchy et converge donc vers une limite $u \in Y$. D'autre part, le point u appartient à toutes les boules $B_Y(u_n,r_n)$ et ne peut pas appartenir à aucun des ensemble X_n. Comme $Y \subset \cup_n X_n$, on obtient une contradiction. □

Il existe une formulation équivalente du théorème 2.2 en termes de sous-ensembles ouverts denses.

Corollaire 2.3. *Dans un espace de Banach X, l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses est dense.*

Démonstration. Soit (G_n) une famille dénombrable d'ouverts denses telle que $X \setminus (\cap_n G_n)$ contient une boule fermée non dégénérée B. Alors $B \subset \cup_n F_n$, où $F_n = G_n^c$ sont des fermés. D'après le théorème 2.2, il existe $m \geq 1$ tel que F_m est dense dans une boule $B' \subset B$. Comme F_m est fermé, on voit que $B' \subset F_m$ et donc G_m n'est pas dense. □

Exemple 2.4. Soit $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes d'une variable réelle. Montrons qu'il n'existe pas de norme pour laquelle $\mathcal{P}$ est un espace de Banach. En effet, soit $\|\cdot\|$ une telle norme et $\mathcal{P}_n$ l'espace des polynômes de degré $\le n$. Alors $\mathcal{P} = \cup_n \mathcal{P}_n$, et d'après le théorème 2.2, il existe $m \ge 1$ et une boule non dégénérée $B \subset \mathcal{P}$ tels que $B \subset \overline{\mathcal{P}}_m = \mathcal{P}_m$. Par symétrie, $\mathcal{P}_m$ contient aussi la boule $-B$, et par convexité, $\mathcal{P}_m$ doit contenir une boule de centre zéro. Comme $\mathcal{P}_m$ est un espace vectoriel, il doit être confondu avec $\mathcal{P}$. La contradiction obtenue montre qu'une telle norme n'existe pas.

L'*intérieur* d'un ensemble $A \subset X$ (noté $\mathring{A}$) est défini comme l'ensemble ouvert maximal inclut dans A.

Corollaire 2.5. *Soit X un espace de Banach et $\{F_n\}$ une suite de fermés de X tels que $\mathring{F}_n = \varnothing$ pour tout $n \ge 1$. Alors l'intérieur de $\bigcup_n F_n$ est vide.*

Démonstration. Soit $G_n = F_n^c$. Alors G_n sont des ouverts denses, et d'après le corollaire 2.3, l'intersection $\bigcap_n G_n$ est dense. Il s'ensuit que son complémentaire $\left(\bigcap_n G_n\right)^c = \bigcup_n F_n$ n'a pas de points intérieurs. □

Le théorème de Baire permet d'établir plusieurs résultats remarquables sur les espaces de Banach. Ils sont présentés dans les § 2.2–2.5.

2.2 Théorème de Banach–Schauder de l'application ouverte

Théorème 2.6. *Soit X, Y deux espaces de Banach et $L : X \to Y$ une application linéaire continue telle que $L(X) = Y$. Alors $L(G) \subset Y$ est ouvert pour tout ouvert $G \subset X$. En particulier, si $L : X \to Y$ est une bijection continue, alors $L^{-1} : Y \to X$ est continue.*

Démonstration. Soit $B = B_X(0,1)$ la boule unité ouverte. Il suffit de montrer que $L(B)$ contient une boule de centre zéro. En effet, dans ce cas pour tout ouvert $G \subset X$ et tout $u \in G$ il existe une boule $B_r = B_X(0,r)$ telle que $u + B_r \subset G$ et donc $Lu + L(B_r)$ contient une boule ouverte de centre Lu.

Étape 1. Montrons d'abord que $\overline{L(B)}$ contient une boule de centre zéro. Comme $Y = \bigcup_{n\ge 1} L(nB)$, d'après le théorème de Baire, il existe$m \ge 1$ tel que $mL(B)$ est dense dans une boule de Y. En utilisant la symétrie de $L(B)$ par rapport à zéro et la convexité, on montre que $\overline{L(B)}$ contient une boule $Q_\rho \subset Y$ de centre zéro et de rayon ρ.

Étape 2. Montrons maintenant que $L(B) \supset Q_{\rho/2}$ ou, ce qui revient au même, $L(2B) \supset Q_\rho$. Soit $v \in \overline{L(B)}$. Alors il existe $u_1 \in B$ tel que $v - Lu_1 \in Q_{\rho/2}$. Comme $Q_{\rho/2} \subset \frac{1}{2}\overline{L(B)}$, il existe $u_2 \in \frac{1}{2}B$ tel que $v - L(u_1+u_2) \in Q_{\rho/4}$. On construit ainsi une suite $u_j \in 2^{1-j}B$ telle que

$$v - \sum_{j=1}^{n} Lu_j \in Q_{2^{-n}\rho} \quad \text{pour tout } n \ge 1.$$

On pose maintenant $u = \sum_j u_j$. Alors $u \in 2B$ et $Lu = v$. □

Le théorème 2.6 est évidemment faux pour les fonctions non linéaires, même en dimension $d = 1$. Par exemple, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue croissante telle que $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$ et $f(x) = 0$ pour $|x| \leq 1$. Alors l'image de l'intervalle $]-1, 1[$ n'est pas ouverte.

2.3 Théorème du graphe fermé

Un corollaire utile du théorème de Banach–Schauder est le résultat ci-dessous sur la continuité de toute application linéaire avec un graphe fermé. Soient X, Y deux espace de Banach. Pour un opérateur linéaire $A : X \to Y$, on note $\Gamma(A)$ son graphe:

$$\Gamma(A) = \{[u, f] \in X \times Y : u \in X, f = Au\}.$$

Il est facile à vérifier que $\Gamma(A)$ est un sous-espace vectoriel de $X \times Y$ qui ne contient pas de vecteurs de la forme $[0, f]$ avec $f \neq 0$. Réciproquement, si $\Gamma \subset X \times Y$ est un sous-espace vectoriel qui ne contient pas de vecteurs de la forme $[0, f]$ avec $f \neq 0$, alors Γ est le graphe d'un opérateur linéaire A défini sur $\Pi_X(\Gamma)$, où Π_X désigne le projecteur naturel de $X \times Y$ sur X.

Théorème 2.7. *Soit $A : X \to Y$ un opérateur linéaire. Alors A est continu si et seulement si $\Gamma(A)$ est un sous-espace fermé de $X \times Y$ muni de la norme $\|[u, f]\| = \|u\|_X + \|f\|_Y$.*

Démonstration. Nous n'allons vérifier que si $\Gamma(A)$ est fermé, alors A est continu; l'autre implication est évidente.

Considérons les projecteurs naturels $\Pi_X : \Gamma(A) \to X$ et $\Pi_Y : \Gamma(A) \to Y$. D'après l'hypothèse, $\Gamma(A)$ est un sous-espace fermé dans l'espace de Banach $X \times Y$, et il est donc aussi un espace de Banach. De plus, Π_X et Π_Y sont des applications linéaires continues, et Π_X est une bijection. Il s'ensuit du théorème 2.6 que $\Pi_X^{-1} : X \to \Gamma(A)$ continue. Comme $A = \Pi_Y \circ \Pi_X^{-1}$, on conclut que A est continu. $\square$

Remarquons qu'une fonction $F : X \to Y$ a un graphe fermé si et seulement si

$$(u_n) \subset X, \quad u_n \to u, \quad F(u_n) \to f \quad \Longrightarrow \quad F(u) = f. \tag{2.1}$$

D'autre part, la continuité de f signifie que

$$(u_n) \subset X, \quad u_n \to u \quad \Longrightarrow \quad F(u_n) \to f = F(u).$$

Cette condition est clairement plus restrictive que (2.1). Par exemple, la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$$

a un graphe fermé, mais elle n'est pas continue au point $x = 0$.

Corollaire 2.8. *Soit X un espace de Banach et $E, F \subset X$ des sous-espaces fermés tels que $X = E \dot{+} F$. Alors les projecteurs $P, Q : X \to X$ associés à cette somme directe sont continus.*

Démonstration. Pour $u \in X$, on écrit $u = v + w$, où $v \in E$ et $w \in F$. Alors $P : X \to X$ est défini par $Pu = v$. C'est opérateur linéaire défini sur X, et pour montrer sa continuité, il suffit d'étalier que son graphe est fermé. Soit $(u_n) \subset X$ une suite telle que $u_n \to u$ et $Pu_n \to v \in E$. Soit $u_n = v_n + w_n$, où $v_n \in E$ et $w_n \in F$. Alors $v_n \to v$ et $w_n \to w \in F$. Il s'ensuit que $u = v + w$, et par l'unicité de cette représentation, on conclut que $Pu = v$. □

2.4 Théorème de Banach–Steinhaus

Il est bien connu que la limite simple de fonctions continues n'est pas nécessairement une fonction continue. Le théorème que nous allons établir ci-dessous implique, en particulier, que dans le cas des opérateurs linéaires la limite est toujours continue.

Théorème 2.9. *Soient X, Y deux espaces de Banach et $\{A_j, j \in J\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ une famille d'opérateurs telle que*

$$\sup_{j \in J} \|A_j u\|_Y < \infty \quad \textit{pour tout } u \in X. \tag{2.2}$$

Alors

$$\sup_{j \in J} \|A_j\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty. \tag{2.3}$$

Corollaire 2.10. *Soit X, Y deux espaces de Banach et $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ une suite telle que $\{A_n u\}$ converge dans Y pour tout $u \in X$. Alors il existe un opérateur $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que $A_n u \to Au$ pour tout $u \in X$.*

Démonstration. On définit A par la formule

$$Au = \lim_{n \to \infty} A_n u, \quad u \in X.$$

C'est une application linéaire définie sur X. De plus, $\sup_{n \geq 1} \|A_n u\|_Y < \infty$ pour tout $u \in X$, et d'après le théorème 2.9, il existe $C > 0$ tel que $\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq C$ pour tout $n \geq 1$. Il s'ensuit que A est un opérateur borné. □

Démonstration du théorème 2.9. Nous allons utiliser le théorème de Baire. Soit

$$X_n = \{u \in X : \|A_j u\|_Y \leq n \text{ pour tout } j \in J\}.$$

Alors (2.2) implique que $X = \cup_n X_n$. D'après le théorème 2.2, il existe une boule $B_X(u_0, r_0)$ et un entier $m \geq 1$ tels que X_m est dense dans $B_X(u_0, r_0)$. Comme A_j est continu, l'ensemble X_m est fermé, et on voit que

$$\|A_j u\|_Y \leq m \quad \text{pour } u \in B_X(u_0, r_0),\ j \in J.$$

En utilisant la symétrie par rapport au point zéro et la convexité, on obtient

$$\|A_j u\|_Y \leq m \quad \text{pour } u \in B_X(0, r_0),\ j \in J.$$

Cette inégalité est équivalente à (2.2) avec $C = m/r_0$. $\square$

Exemple 2.11. Pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{S})$, on définit ses coefficients de Fourier

$$c_k(f) = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Considérons l'application linéaire $L : L^1(\mathbb{S}) \to \ell_\infty$ qui associe à f la suite $(c_k(f), k \in \mathbb{Z})$. Il est claire que $\|L\| = 1$. De plus, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue, l'image de L est inclut dans c_0 (l'espace des suites qui convergent vers zéro). Montrons que $L : L^1(\mathbb{S}) \to c_0$ est injective. En effet, si $Lf = 0$, alors

$$\int_{\mathbb{S}} f(x) g(x)\, \mathrm{d}x = 0 \tag{2.4}$$

pour tout polynôme trigonométrique g. Le théorème de Weierstrass (voir § 3.2) implique que (2.4) reste vrai pour toute fonction $g \in C(\mathbb{S})$. Soit maintenant $(g_n) \subset C(\mathbb{S})$ une suite bornée qui converge presque partout vers la fonction $\mathrm{sgn}(f)$ égale à 1 si $f(x) \geq 0$ et à -1 si $f(x) < 0$. Alors la relation (2.4) et le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée impliquent que

$$0 = \int_{\mathbb{S}} f(x) g_n(x)\, \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{S}} |f(x)| \mathrm{d}x = 0.$$

Il s'ensuit que $f = 0$ presque partout.

Montrons maintenant que L n'est pas surjective. Si L est surjective, alors d'après le théorème de Banach–Schauder, l'application inverse est continue:

$$\|L^{-1} u\|_{L^1(\mathbb{S})} \leq C\, \|u\|_\infty, \quad u = (u_n) \in c_0. \tag{2.5}$$

Soit $D_N(x)$ le noyau de Dirichlet:

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{2\pi \sin \frac{x}{2}}.$$

Alors $\|L(D_N)\|_\infty = 1$ et $\|D_N\|_{L^1} \to \infty$:

$$\|D_N\|_{L^1(\mathbb{S})} = \int_0^\pi \frac{|\sin(N + \frac{1}{2})x|}{\pi \sin \frac{x}{2}} \mathrm{d}x \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin x|}{x} \mathrm{d}x \sim \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.$$

On obtient donc une contradiction avec (2.5).

Considérons maintenant l'opérateur S_N qui associe à $f \in L^1(\mathbb{S})$ sa série de Fourier tronquée au niveau N:

$$(S_N f)(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e^{ikx} = \int_{\mathbb{S}} D_N(x - y) f(y)\, \mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{S}.$$

On peut montrer que

$$\|S_N\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{S}))} = \|S_N\|_{\mathcal{L}(C(\mathbb{S}))} = \|D_N\|_{L^1} \to +\infty.$$

Le théorème de Banach–Steinhaus implique qu'il existe des fonctions $f \in L^1(\mathbb{S})$ et $g \in C(\mathbb{S})$ telle que

$$S_N f \not\to f \quad \text{dans } L^1(\mathbb{S}), \qquad S_N g \not\to g \quad \text{dans } C(\mathbb{S}).$$

2.5 Théorème de Hahn–Banach

Soit X un espace vectoriel. On dit $p : X \to \mathbb{R}_+$ est une *semi-norme* si

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \quad p(x+y) \le p(x) + p(y) \quad \text{pour tous } x, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Théorème 2.12 (Hahn–Banach réel)**.** *Soit X un espace vectoriel réel muni d'une semi-norme $p : X \to \mathbb{R}_+$, $E \subset X$ un sous-espace vectoriel et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction linéaire telle que*

$$|f(u)| \le p(u) \quad \text{pour } u \in E. \tag{2.6}$$

Alors il existe une fonction linéaire $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ telle que

$$\tilde{f}\big|_E = f, \qquad |\tilde{f}(u)| \le p(u) \quad \text{pour } u \in X. \tag{2.7}$$

Démonstration. Nous allons montrer ce résultat sous l'hypothèse supplémentaire d'existence d'une suite $(u_n) \subset X$ vérifiant la propriétés suivantes:

- Soit $Y_n = \mathrm{Vect}\{E, u_1, \dots, u_n\}$. Alors $u_{n+1} \notin Y_n$ pour tout $n \ge 0$.
- Soit $Y = \cup_n Y_n$. Alors pour tout $u \in X$ il existe une suite $(v_k) \subset Y$ telle que $p(v_k - u) \to 0$ quand $k \to \infty$.

Cette hypothèse nous permettra d'éviter l'utilisation du lemme de Zorn.

Il suffit de construire une extension de f à l'espace vectoriel engendrée par E et la suite $\{u_n\}$. En effet, si une telle extension g est déjà construite, alors pour $u \in X$ on pose

$$\tilde{f}(u) = \lim_{k \to \infty} g(v_k), \tag{2.8}$$

où la suite $(v_k) \subset Y$ est telle que $p(v_k - u) \to 0$. La limite (2.8) ne dépend pas de la suite (v_k).

Pour construire une extension de f à l'espace Y, on construit par récurrence des fonctions linéaires f_n définies sur les sous-espaces Y_n telles que, pour tout entier $n \ge 0$, on a

$$f_{n+1}\big|_{Y_n} = f_n, \qquad |\tilde{f}_n(u)| \le p(u) \quad \text{pour } u \in Y_n, \tag{2.9}$$

où $f_0 = f$. Supposons que f_n est déjà construite. Alors pour $u \in Y_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose

$$f_{n+1}(u + \alpha u_{n+1}) = f_n(u) + \alpha r,$$

où $r \in \mathbb{R}$ sera choisi plus tard. On veut trouver $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$|f_n(u) + \alpha r| \leq p(u + \alpha u_{n+1}) \quad \text{pour tout } u \in Y_n,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Il est facile à voir qu'il suffit que cette inégalité soit vraie pour $\alpha > 0$. Alors elle est équivalente aux conditions suivantes :

$$r \leq \frac{p(u + \alpha u_{n+1}) - f_n(u)}{\alpha}, \quad r \geq -\frac{p(u + \alpha u_{n+1}) + f_n(u)}{\alpha},$$

où $\alpha > 0$ et $u \in Y_n$ sont quelconques. Une telle constante existe si

$$\frac{p(u + \alpha u_{n+1}) - f_n(u)}{\alpha} \geq -\frac{p(v + \beta u_{n+1}) + f_n(v)}{\beta} \quad \text{pour tous } \alpha, \beta > 0,\ u, v \in Y_n.$$

Cette condition est équivalente à l'inégalité

$$f_n(\beta u - \alpha v) \leq p(\beta u + \alpha\beta u_{n+1}) + p(\alpha v + \beta\alpha u_{n+1}).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, cette condition est vérifiée pour tous $\alpha, \beta > 0$ et $u, v \in Y_n$. □

Théorème 2.13 (Hahn–Banach complexe)**.** *Soit X un espace vectoriel complexe muni d'une semi-norme $p : X \to \mathbb{R}_+$, $E \subset X$ un sous-espace vectoriel et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction linéaire vérifiant* (2.6)*. Alors il existe une fonction linéaire $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ telle que* (2.7) *a lieu.*

Démonstration. On note d'abord que si f est une fonction linéaire sur définie sur un sous-espace $F \subset X$ et représentée sous la forme $f = f_1 + if_2$ avec $f_1 = \operatorname{Re} f$ et $f_2 = \operatorname{Im} f$, alors

$$f_1(iu) = -f_2(u) \quad \text{pour tout } u \in F.$$

Réciproquement, si $g : F \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathbb{R}$-linéaire, alors la fonction

$$f(u) = g(u) - ig(iu) \tag{2.10}$$

est $\mathbb{C}$-linéaire sur F.

Soit maintenant $f : E \to \mathbb{C}$ une fonction linéaire vérifiant (2.6). Alors sa partie réelle $g : E \to \mathbb{R}$ vérifie aussi (2.6) et d'après le théorème 2.12 admet un prolongement $\tilde{g}$ à l'espace X tel que $|\tilde{g}(u)| \leq p(u)$ pour tout $u \in X$. Alors la fonction $\tilde{f} : X \to \mathbb{C}$ définie par (2.10) vérifie toutes les propriétés requises. □

Un cas particulier important des théorème 2.12 et 2.13 est celui où X est un espace normé et p est la norme de X. Plus précisément, étant donné un espace vectoriel normé X, réel ou ou complexe, on note X' son espace dual; c'est-à-dire, l'espace de toutes les applications linéaires continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit X' de la norme

$$\|f\|_{X'} = \sup_{\|u\|_X \leq 1} |f(u)|, \quad f \in X'.$$

On vérifie facilement que c'est un espace de Banach. Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème 2.13.

Corollaire 2.14. *Soit X un espace vectoriel complexe normé, $E \subset X$ un sous-espace vectoriel, $f : E \to \mathbb{C}$ une fonction linéaire telle que*

$$|f(u)| \leq C\|u\| \quad \textit{pour tout } u \in E. \tag{2.11}$$

Alors il existe $\tilde{f} \in X'$ vérifiant (2.7) *avec $p = C\,\|\cdot\|$.*

Le théorème de Hahn–Banach admet une interprétation géométrique. Pour des sous-ensembles A, B de X et une fonctionnelle $f \in X'$, on écrit $f(A) \leq f(B)$ ($f(A) < f(B)$) si $f(a) \leq f(b)$ ($f(a) < f(b)$) pour tout $a \in A$ et $b \in B$.

Théorème 2.15 (Hahn–Banach, forme géométrique)**.** *Soit X un espace de vectoriel réel normé, $K \subset X$ un sous-ensemble convexe et $u_0 \in K$ un point interne. Alors pour tout point $u \in X \setminus K$ il existe une fonctionnelle $f \in X'$ non nulle telle que $f(K) \leq f(u)$. De plus, si K est ouvert, alors on peut choisir $f \in X'$ telle que $f(K) < f(u)$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $u_0 = 0$, et dans ce cas, K est un *ensemble absorbant*; c'est-à-dire, pour tout $u \in X$ il existe $t = t(u) > 0$ tel que $u \in tK$. On définit la *fonctionnelle de Minkowski* pour K par la formule

$$\mu_K(u) = \inf\{t > 0 : t^{-1}u \in K\}, \quad u \in X. \tag{2.12}$$

Comme $u \notin K$, on a $\mu_K(u) \geq 1$. On définit une fonction linéaire $g : \mathrm{Vect}\{u\} \to \mathbb{R}$ telle que $g(u) = 1$. Alors $|g(tu)| \leq |t|g(u) \leq \mu_K(tu)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'après le théorème 2.12, il existe un prolongement f de g à l'espace X tel que $|f(v)| \leq \mu_K(v)$ pour tout $v \in X$. En particulier, $f(v) \leq 1 = f(u)$ pour tout $v \in K$. Comme K contient une boule ouverte de centre zéro, on conclut que f est continue. Enfin, si K est ouvert, alors $|f(v)| \leq \mu_K(v) < 1 = f(u)$ pour tout $v \in K$. $\square$

Corollaire 2.16. **(a)** *Soit X un espace vectoriel normé, $E \subset X$ un sous-espace vectoriel et $u \in X \setminus E$. Alors il existe $f \in X'$ telle que $f(v) = 0$ pour tout $v \in E$, $\|f\| = 1$ et $f(u) = \mathrm{dist}(u, E)$.*

(b) *Soient A, B deux ensembles convexes dans un espace vectoriel normé X tels que $A \cap B = \varnothing$ et A est ouvert. Alors il existe $f \in X'$ tel que $f(A) < f(B)$.*

Démonstration. Pour démontrer (a), il suffit de définir une fonctionnelle continue $g : \mathrm{Vect}\, E, u \to \mathbb{C}$ par la relation

$$g(\alpha u + v) = \alpha \,\mathrm{dist}(u, E) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{C} \text{ et } v \in E,$$

et de la prolonger à X en utilisant le théorème 2.13.

Pour établir (b), on choisit des points quelconques $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$. Soit $u = b_0 - a_0$. Alors $K = A - B + u$ est un ouvert convexe contenant zéro et $u \notin K$. Le théorème (2.15) implique qu'il existe $f \in X'$ telle que $f(K) < f(u) = 1$. Si maintenant $a \in A$ et $b \in B$, alors $a - b + u \in K$, d'où on conclut que

$$f(a) - f(b) = f(a - b + u) - 1 < 0.$$

$\square$

2.6 Dualité dans les espaces de Banach

Théorème 2.17. *Soit X un espace de Banach dont le dual X' est un espace séparable. Alors X est séparable.*

Ce résultat implique, par exemple, que le dual de ℓ_∞ ne peut pas être égale à ℓ_1. D'autre part, comme $(\ell_1)' = \ell_\infty$, l'inverse du théorème 2.17 est fausse.

Démonstration. Soit $\{f_n\} \subset X'$ une suite dense de fonctionnelles non nulles et $u_n \in X$ des vecteurs unités tels que $f_n(u_n) \geq \|f_n\|_{X'} - \frac{1}{n}$. Montrons que $\{u_n\}$ est dense. En effet, si ce n'est pas le cas, alors l'espace vectoriel E engendré par $\{u_n\}$ n'est pas dense dans X. D'après le corollaire 2.16, il existe une fonctionnelle $f \in X'$ non nulle qui s'annule sur E. Soit $\{n_k\}$ une suite d'entiers telle que $f_{n_k} \to f$. Alors

$$0 = f(u_{n_k}) \geq f_{n_k}(u_{n_k}) - \|f - f_{n_k}\|_{X'} \geq \|f_{n_k}\|_{X'} - \frac{1}{n_k} - \|f - f_{n_k}\|_{X'} \to \|f\|_{X'}.$$

Comme $\|f\|_{X'} > 0$, on obtient une contradiction. $\square$

Théorème 2.18. *Soit X un espace vectoriel normé et X'' son deuxième espace dual. Alors il existe une isométrie naturelle $i : X \to X''$.*

On dit X est un espace *réflexif* si l'image de i est confondue avec X''. Par exemple, l'espace ℓ_p est réflexif pour tout $p \in]1, \infty[$, et les espaces ℓ_1 et ℓ_∞ ne le sont pas.

Démonstration. On définit $i : X \to X''$ par la formule $i(u)(f) = f(u)$. Alors i est une application linéaire telle que

$$\|i(u)\|_{X''} = \sup_{\|f\|_{X'} \leq 1} |f(u)| \leq \|u\| \quad \text{pour tout } u \in X.$$

D'autre part, d'après le corollaire 2.16 (a), il existe $f \in X'$ telle que $f(u) = 1$ et $\|f\|_{X'} = 1$. Il s'ensuite que $i(u)(f) = 1$, et l'on conclut que $\|i(u)\|_{X''} = 1$. $\square$

Corollaire 2.19. *Un espace de Banach X est séparable et réflexif si et seulement si son dual X' est séparable et réflexif.*

Une partie A d'un espace vectoriel normé X est appelé un *ensemble total* si l'espace vectoriel engendré par A est dense dans X. Pour des sous-ensembles $A \subset X$ et $F \subset X'$, on définit les *annulateurs* par les formules

$$A^\circ = \{f \in X' : f(u) = 0 \text{ pour tout } u \in A\},$$
$$F^\circ = \{u \in X : f(u) = 0 \text{ pour tout } f \in F\}.$$

Il est clair que si $A \subset B$, alors $B^\circ \subset A^\circ$, et que $A \subset A^{\circ\circ}$.

Théorème 2.20. *Soit X un espace vectoriel normé et $A \subset X$. Alors*

$$\overline{\mathrm{Vect}(A)} = A^{\circ\circ}. \tag{2.13}$$

En particulier, A est un ensemble total si et seulement si $A^\circ = \{0\}$, et un sous-espace $E \subset X$ est fermé si et seulement si $E^{\circ\circ} = E$.

Démonstration. Il est facile à vérifier que $\big(\overline{\mathrm{Vect}(A)}\big)^\circ = A^\circ$. Il suffit donc de montrer que si E est un sous-espace fermé, alors $E^{\circ\circ} = E$.

Soit $u \in E$. Alors pour tout $f \in E^\circ$, on a $f(u) = 0$, d'où on conclut que $E \subset E^{\circ\circ}$. Réciproquement, si $u \notin E$, alors d'après le corollaire 2.16, il existe $f \in X'$ telle que $f(v) = 0$ pour tout $v \in E$ et $f(u) = 1$. Il s'ensuit que $u \notin E^{\circ\circ}$. □

Étant donnés deux espaces de Banach X, Y et un opérateur $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, on définit son dual $A^* : Y' \to X'$ par

$$(A^*f)(u) = f(Au), \quad f \in Y', \quad u \in X.$$

Théorème 2.21. *Soient X, Y deux espaces vectoriels normés. Alors l'application $F : \mathcal{L}(X,Y) \to \mathcal{L}(Y',X')$ qui associe à A son dual A^* est une isométrie linéaire. De plus, pour tout $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ on a*

$$(\mathrm{Im}\, A)^\circ = \mathrm{Ker}\, A^*, \quad \big(\overline{\mathrm{Ker}\, A^*}\big)^\circ = \overline{\mathrm{Im}\, A}, \quad (\mathrm{Im}\, A^*)^\circ = \mathrm{Ker}\, A. \tag{2.14}$$

Démonstration. Le linéarité de F est évidente. Le théorème de Hahn–Banach implique que

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|u\|\le 1, \|f\|_{Y'}\le 1} |f(Au)| = \sup_{\|u\|\le 1, \|f\|_{Y'}\le 1} |(A^*f)(u)| = \|A^*\|_{\mathcal{L}(Y',X')}.$$

Cela signifie que F préserve la norme.

Le démonstration des relations (2.14) est facile, et nous nous contentons d'établir la première. Soit $f \in (\mathrm{Im}\, A)^\circ$. Alors $0 = f(Au) = (A^*f)(u)$ pour tout $u \in X$, d'où on conclut que $f \in \mathrm{Ker}\, A^*$. Réciproquement, si $f \in \mathrm{Ker}\, A^*$, alors $A^*f = 0$ et donc $f(Au) = 0$ pour tout $u \in X$. □