3 Espaces fonctionnels

3.1 Topologie d'un espace métrique

Soit (X, d) un *espace métrique*; c'est-à-dire, X est un ensemble quelconque et $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ est une fonction vérifiant les trois propriétés suivantes pour tous $u, v, w \in X$:

Séparation de points: $d(u, v) = 0$ si et seulement si $u = v$;

Symétrie: $d(u, v) = d(v, u)$;

Inégalité triangulaire: $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

On appelle d une *métrique* (ou une *distance*) sur X. Rappelons qu'une *boule ouverte* de centre $u \in X$ et de rayon $r > 0$ est définie par

$$B(u, r) = \{v \in X : d(u, v) < r\}.$$

Un ensemble $A \subset X$ est dit *ouvert* si pour tout point $u \in A$ il existe une boule ouverte $B \subset X$ de centre u telle que $B \subset A$. Un ensemble $A \subset X$ est dit *fermé* si son complémentaire est ouvert. Un espace métrique est dit *complet* si toute suite de Cauchy possède une limite. Si Y est un autre espace métrique, alors une fonction $f : X \to Y$ est dite *continue* si pour tout $u \in X$ et $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$v \in X,\ d_X(u, v) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y\big(f(u), f(v)\big) < \varepsilon,$$

où on écrit d_X et d_Y pour les métriques de X et Y.

Exercice 3.1. Soit X et Y des espaces métriques et $f : X \to Y$ une fonction. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

- f est continue;
- Si $(u_n)_{n\geq1} \subset X$ est une suite convergente, alors $(f(u_n))_{n\geq1}$ converge aussi;
- L'image réciproque par f de tout ensemble ouvert (fermé) est ouverte (fermée);
- Pour tout $u \in X$ et tout ouvert $U \subset Y$ contenant $f(u)$ il existe un ouvert $V \subset X$ tel que $u \in V$ et $f(V) \subset U$.

Tout espace vectoriel normé X est un espace métrique. Dans ce cas, la métrique est donnée par la formule $d(u, v) = \|u - v\|$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme de X.

Exercice 3.2. Montrer que dans un espace vectoriel normé les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire sont continues.

Définition 3.3. Un espace métrique X est dit *compact* si tout recouvrement de X par des ouverts contient un sous-recouvrement fini. En d'autres termes, si $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, où $U_\alpha \subset X$ sont des ouverts, alors il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $X = \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k}$.

Exercice 3.4. Soient X et Y des espaces métriques. Montrer que si Y est compact, alors toute fonction $F : X \to Y$ avec un graphe fermé est continue. En particulier, si X, Y sont des espace métriques compacts et $F : X \to Y$ est une bijection continue, alors l'inverse de F est continue.

Exemples 3.5. **Fonctions continues bornées.** Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. On note $C(\overline{D})$ l'espace des fonctions continues $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ telles que

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in D} |f(u)| < \infty. \tag{3.1}$$

Alors $C(\overline{D})$ munie de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$ est un espace de Banach.

Espaces de Lebesgue. Soit $p \in [1, +\infty]$ et $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. On note $L^p(D)$ l'espace des fonctions boréliennes $f : D \to \mathbb{C}$ telles que

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_D |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} < \infty. \tag{3.2}$$

Dans le cas $p = \infty$, cette norme est remplacée par $\|f\|_{L^\infty}$.

Espaces de Sobolev. Soit $I = (a, b)$ un intervalle (qui peut être non borné). Rappelons qu'une fonction continue $f : I \to \mathbb{C}$ est dite *absolument continue* si il existe une fonction borélienne $g : I \to \mathbb{C}$ intégrable sur tout intervalle borné $J \subset I$ telle que

$$f(x) = C + \int_{x_0}^{x} g(y)\, \mathrm{d}y, \quad x \in I,$$

où C est un nombre complexe et $x_0 \in I$. On appelle g la *dérivée* de f et l'on note $g = f'$. Soit $p \in [1, +\infty]$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ est définit comme l'ensemble de fonctions absolument continues dont la dérivée appartient à $L^p(I)$. Cet espace est muni de la norme

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \left(\|f\|^p_{L^p(I)} + \|f'\|^p_{L^p(I)} \right)^{1/p}.$$

Les espaces de Sobolev d'ordre supérieur sont définit par récurrence. Plus précisément, pour un entier $k \geq 2$ on introduit l'espace

$$W^{k,p}(I) = \{ f \in W^{1,p}(I) : f' \in W^{k-1,p}(I) \}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{W^{k,p}(I)} = \left(\sum_{j=0}^{k} \|f^{(j)}\|^p_{L^p(I)} \right)^{1/p},$$

où $f^{(j)}$ désigne la $j^{\text{ième}}$ dérivée de f.

Exercice 3.6. Montrer que les espaces considérés dans l'exemple 3.5 sont des espaces de Banach.

3.2 Théorème de Weierstrass

Théorème 3.7. *Soit* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *un intervalle borné et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors il existe une suite de polynômes* $\{P_n\}$ *tel que*

$$\|f - P_n\|_{L^\infty} \to 0 \quad \textit{quand } n \to \infty. \tag{3.3}$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $[a,b] = [0,1]$ et que $f(0) = f(1) = 0$. On continue f sur $\mathbb{R} \setminus [0,1]$, en obtenant ainsi une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$ à support dans $[0,1]$.

On définit $Q_n(x) = c_n(1-x^2)^n$, avec $c_n > 0$ tel que

$$\int_{-1}^{1} Q_n \mathrm{d}x = 1. \tag{3.4}$$

Il est facile à voir que cette condition implique l'inégalité $c_n < \frac{n+1}{2}$. Il s'ensuit que, pour tout $\delta > 0$,

$$\sup_{\delta \le |y| \le 1} |Q_n(y)| \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty. \tag{3.5}$$

On définit maintenant

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+y) Q_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{1} f(y) Q_n(x-y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in [0,1].$$

Alors P_n est un polynôme. Montrons que la suite $\{Q_n\}$ converge vers f uniformément sur $[0,1]$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continu, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|y| \le \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x+y) - f(x)| \le \varepsilon/2. \tag{3.6}$$

Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - P_n(x)| &\le \int_{\mathbb{R}} |f(x+y) - f(x)| Q_n(y)\,\mathrm{d}y \\ &\le \left(\int_{|y| \le \delta} + \int_{\delta \le |y| \le 1} \right) |f(x+y) - f(x)| Q_n(y)\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

où on a utilisé (3.4). Il s'ensuit de (3.4) et (3.6) que la première intégrale est majorée par $\varepsilon/2$ pour tout n et x. D'autre part, la convergence (3.5) implique que la deuxième intégrale converge vers zéro uniformément en x quand $n \to \infty$. On conclut que $|f(x) - P_n(x)| \le \varepsilon$ pour $n \gg 1$ et tout $x \in [0,1]$. □

Corollaire 3.8. *Il existe une suite de polynômes* P_n *telle que* $P_n(0) = 0$ *pour tout* $n \ge 1$ *et* $P_n(x) \to |x|$ *quand* $n \to \infty$ *uniformément en* $x \in [-a,a]$ *pour tout* $a > 0$.

3.3 Théorème de Stone–Weierstrass

Le théorème de Weierstrass démontré ci-dessous permet d'établir un résultat plus général, appelé le théorème de Stone–Weierstrass, qui implique, en particulier, la densité de des polynômes dans l'espace $C(\overline{D})$ pour tout domaine borné $D \subset \mathbb{R}^d$. Pour énoncer ce résultat, on introduit d'abord quelques définitions.

Définition 3.9. Soit X un espace métrique compact et $C(X)$ l'espace des fonctions continues $f : X \to \mathbb{C}$ muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{u \in X} |f(u)|.$$

Un sous espace $\mathcal{A} \subset C(X)$ est appelé une *algèbre* si $fg \in \mathcal{A}$ pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{A}$. On dit qu'une algèbre $\mathcal{A} \subset C(X)$ *sépare les points* si pour tous $u, v \in X$, $u \neq v$, il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(u) \neq f(v)$.

Théorème 3.10 (théorème de Stone–Weierstrass)**.** *Soit X un espace métrique compact et $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(X)$ une algèbre fermée qui sépare les points. Alors soit $\mathcal{A} = C_{\mathbb{R}}(X)$, soit il existe $v \in X$ tel que $\mathcal{A} = \{f \in C_{\mathbb{R}}(X) : f(v) = 0\}$. En particulier, si la fonction $\mathbf{1}$ identiquement égale à 1 appartient à $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}$ est confondue avec $C_{\mathbb{R}}(X)$.*

Nous n'allons considérer que le cas particulier où $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$. Dans cette situation le théorème est conséquence des deux propositions suivantes:

Proposition 3.11. *Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}_{\mathbb{R}}(X)$ une algèbre. Alors $\min(f, g), \max(f, g) \in \mathcal{A}$ pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{A}$.*

Proposition 3.12 (théorème de Kakutani–Krein)**.** *Soit $L \subset C_{\mathbb{R}}(X)$ un sous-espace vectoriel fermé qui sépare les points, contient la fonction $\mathbf{1}$ et est tel que $\min(f, g), \max(f, g) \in L$ pour toutes fonctions $f, g \in L$. Alors $L = C_{\mathbb{R}}(X)$.*

Démonstration de la proposition 3.11. Comme $\max(f, g) = \frac{1}{2}|f-g| + \frac{1}{2}(f+g)$ et $\min(f, g) = -\max(-f, -g)$, il suffit de montrer que si $f \in \mathcal{A}$, alors $|f| \in \mathcal{A}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\|f\|_{L^\infty} \leq 1$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes $\{P_n\}$ telle que $\sup_x \big|P_n(x) - |x|\big| \to 0$ quand $n \to \infty$, où la borne supérieure est prise par rapport à $x \in [-1, 1]$. On peut supposer que $P_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 0$; dans le cas contraire, il suffit de remplacer P_n par $P_n - P_n(0)$. Alors $\|P_n(f) - |f|\|_{L^\infty} \to 0$ quand $n \to \infty$. Comme $\mathcal{A}$ est un algèbre et $P_n(0) = 0$, on a $P_n(f) \in \mathcal{A}$, et comme $\mathcal{A}$ est fermée, on conclut que $|f| \in \mathcal{A}$. □

Démonstration de la proposition 3.12. Soit $g \in C_{\mathbb{R}}(X)$ une fonction et $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche $f \in L$ tel que $\|f - g\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$. Supposons que pour tout $u \in X$ il existe $f_u \in L$ tel que $f_u(u) = g(u)$ et $g \leq f_u + \varepsilon$. Pour tout $u \in X$ il existe un voisinage V_u tel que $g(u) \geq f_u(u) - \varepsilon$ pour $u \in V_u$. Comme

$\bigcup_{u\in X} V_u$ est un recouvrement du compact X, il existe $u_1,\dots,u_n\in X$ tels que $\bigcup_j V_{u_j} = X$. On définit $f = \min(f_{u_1},\dots,f_{u_n})$. Alors

$$f(u)+\varepsilon = \min(f_{u_j}(u), j=1,\dots,n)+\varepsilon \geq g(u) \quad \text{pour tout } u\in X.$$

D'autre part, pour tout $u\in X$ il existe un entier j tel que $u\in V_{u_j}$. Il s'ensuit que $f(u)-\varepsilon \leq f_{u_j}(u)-\varepsilon \leq g(u)$. Ces deux inégalités impliquent le résultat cherché.

Il nous reste à construire les fonctions $f_u\in L$. Comme L sépare les points et $\mathbf{1}\in L$, pour tous points $u,v\in X$ il existe $f_{uv}\in L$ tel que $f_{uv}(u)=g(u)$ et $f_{uv}(v)=g(v)$. Pour tout $v\in X$ on note U_v un voisinage de v tel que $f_{uv}(z)+\varepsilon\geq g(z)$ pour $z\in U_v$. Comme X est compact, il existe $u_1,\dots,u_n\in X$ tels que $\bigcup_j U_{v_j}=X$. Alors la fonction $f_u=\max(f_{uv_1},\dots,f_{uv_n})$ appartient à $\mathcal{A}$ et vérifie les propriétés requises. $\square$

Le fait que dans le théorème 3.10 on considère le cas réel est important. Par exemple, si $\mathcal{A}$ désigne le sous-espace dans $C([0,2\pi])$ des fonctions telles que $\int_0^{2\pi} f(x)e^{ikx}\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout entier $k<0$, alors $\mathcal{A}$ est une algèbre fermée qui sépare les points et contient la fonction identiquement égale à 1, mais $\mathcal{A}\neq C([0,2\pi])$. Cependant, sous une hypothèse supplémentaire sur l'algèbre, le théorème de Stone–Weirestrass reste vrai dans le cas complexe.

Théorème 3.13 (théorème de Stone–Weierstrass complexe)**.** *Soit X un espace métrique compact et $\mathcal{A}\subset C(X)$ une algèbre fermée qui sépare les points et telle que $\bar{f}\in\mathcal{A}$ pour tout $f\in\mathcal{A}$. Alors soit $\mathcal{A}=C(X)$, soit il existe $v\in X$ tel que $\mathcal{A}=\{f\in C(X) : f(v)=0\}$.*

Le fait que le conjugué complexe de tout élément $f\in\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{A}$ est important. Par exemple, si $D\subset\mathbb{C}$ désigne le disque unité, alors les fonctions holomorphes continues sur $\overline{D}$ forment une algèbre $\mathcal{A}$ fermée qui sépare les points et contient la fonction identiquement égale à 1, mais $\mathcal{A}\neq C(\overline{D})$.

Démonstration. Il est facile à voir que si $f\in\mathcal{A}$, alors $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f\in\mathcal{A}$. Il s'ensuit que $\operatorname{Re}\mathcal{A}=\{\operatorname{Re} f : f\in\mathcal{A}\}$ est une algèbre fermée qui sépare les points. De plus, elle est confondue avec $\operatorname{Im}\mathcal{A}=\{\operatorname{Im} f : f\in\mathcal{A}\}$. D'après le théorème de Stone–Weierstrass, soit il existe $v\in X$ tel que $\operatorname{Re}\mathcal{A}=\{f\in C_{\mathbb{R}}(X) : f(v)=0\}$, soit $\operatorname{Re}\mathcal{A}=C_{\mathbb{R}}(X)$. La conclusion du théorème est une conséquence immédiate de ce résultat. $\square$

Un corollaire intéressant du théorème de Stone–Weierstrass est le résultat.

Théorème 3.14 (théorème d'extension de Tietze)**.** *Soit X un espace métrique compact et $Y\subset X$ un ensemble fermé. Alors pour toute fonction $f\in C_{\mathbb{R}}(Y)$ il existe $\tilde{f}\in C_{\mathbb{R}}(X)$ tel que $\tilde{f}(u)=f(u)$ pour tout $u\in Y$.*

Démonstration. On note $R : C(X)\to C(Y)$ l'opérateur de restriction d'une fonction $f : X\to\mathbb{R}$ à Y. Il faut montrer que R est surjective. Il est claire que $\operatorname{Im}(R)$ est une algèbre dans $C_{\mathbb{R}}(Y)$ qui contient la fonction $\mathbf{1}$. De plus, le lemme suivant implique que $\operatorname{Im}(R)$ sépare les points.

Lemme 3.15 (Urysohn). *Soit X un espace métrique compact et $F_1, F_2 \subset X$ deux fermés disjoints. Alors il existe une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $f(u) = 0$ pour $u \in F_1$ et $f(u) = 1$ pour $u \in F_2$.*

D'après le théorème de Stone–Weierstrass, pour conclure que $\operatorname{Im}(R) = C_{\mathbb{R}}(Y)$, il suffit de montrer que $\operatorname{Im}(R)$ est fermé. On note $\mathcal{N} = \{f \in C_{\mathbb{R}}(X) : Rf = 0\}$ le noyau de R et $C_{\mathbb{R}}(X)/\mathcal{N}$ l'espace quotient. Alors on peut définir l'application $\widetilde{R} : C_{\mathbb{R}}(X)/\mathcal{N} \to C_{\mathbb{R}}(Y)$ qui associe à $[f]$ la fonction Rf. La propriété cherchée sera établie si on arrive à montrer la relation

$$\|\widetilde{R}[f]\|_{L^\infty(Y)} = \|[f]\|_{C_{\mathbb{R}}(X)/\mathcal{N}} \quad \text{pour tout } f \in C_{\mathbb{R}}(X).$$

Comme $\|R(f)\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^\infty}$, on a $\|\widetilde{R}[f]\|_{L^\infty(Y)} \le \|[f]\|_{C_{\mathbb{R}}(X)/\mathcal{N}}$. Il suffit donc construire, pour tout $g \in \operatorname{Im}(R)$, une fonction $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$ telle que $R(f) = g$ et $\|f\|_{L^\infty(X)} \le \|g\|_{L^\infty(Y)}$. Comme $g \in \operatorname{Im}(R)$, il existe $h \in C_{\mathbb{R}}(X)$ tel que $Rh = g$. La fonction $f = \max\bigl(-\|g\|_{L^\infty}, \min(\|g\|_{L^\infty}, h)\bigr)$ vérifie la propriété requise. $\square$

Démonstration du lemme 3.15. On définit $f : X \to \mathbb{R}$ par la formule

$$f(u) = \frac{d(u, F_1)}{d(u, F_1) + d(u, F_2)}.$$

Alors f est continue, s'annule sur F_1 et est égale à 1 sur F_2. $\square$

3.4 Théorème de Arzelà–Ascoli

Soit X un espace métrique. Le résultat suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour la compacité d'un sous-ensemble de $C(X)$, sous l'hypothèse que X soit compact.

Théorème 3.16. *Supposons que X est compact. Alors un ensemble $\mathcal{A} \subset C(X)$ est compact si et seulement si il est fermé et vérifie les deux propriétés suivantes:*

(a) *Pour tout $u \in X$, l'ensemble $\{f(u), f \in \mathcal{A}\}$ est borné dans $\mathbb{C}$.*

(b) *La famille $\mathcal{A}$ est équicontinue en tout point $u \in X$; c'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V_u de u tel que*

$$v \in V_u \quad \Longrightarrow \quad |f(v) - f(u)| \le \varepsilon \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{A}. \tag{3.7}$$

Nous aurons besoin d'un résultat qui donne des conditions nécessaires et suffisantes pour la compacité d'un espace métrique. Sa démonstration est laissée comme un exercice.

Exercice 3.17. Montrer que, pour un espace métrique Y, les propriétés suivantes sont équivalentes.

- Y est compact;
- Si $\{F_\alpha\}$ est une famille de fermés de Y telle que $\bigcap_{j=1}^n F_{\alpha_j} \neq \varnothing$ pour tout ensemble fini $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, alors $\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \varnothing$.

- Y est complet, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des points $u_1, \dots, u_n \in X$ tels que $Y = \bigcup_j B(u_j, \varepsilon)$, où $B(u, r)$ désigne la boule ouverte de centre $u \in Y$ et de rayon $r > 0$.
- Toute suite $\{u_n\} \subset Y$ possède un point d'accumulation.

Démonstration du théorème 3.16. Montrons d'abord que les conditions (a) et (b) sont nécessaires. Comme tout ensemble compact est borné, $\mathcal{A}$ est borné et, par conséquent, $\{f(u), f \in \mathcal{A}\}$ est borné dans $\mathbb{C}$. Pour établir (b), on fixe $\varepsilon > 0$ et on utilise l'exercice 3.17 pour trouver des fonctions f_{n_j}, $j = 1, \dots, k$, telles que

$$\min\{\|f - f_{n_j}\|_{L^\infty}, j = 1, \dots, k\} \le \varepsilon/3 \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{A}. \tag{3.8}$$

Soit maintenant $u \in X$ et $V \subset X$ un voisinage de u tel que

$$v \in V \quad \Longrightarrow \quad |f_{n_j}(v) - f_{n_j}(u)| \le \varepsilon/3 \quad \text{pour } j = 1, \dots, k. \tag{3.9}$$

Les inégalité (3.8) et(3.9) impliquent que, pour tout $f \in \mathcal{A}$ et $v \in V$, on a

$$|f(v) - f(u)| \le |f(v) - f_{n_l}(v)| + |f_{n_l}(v) - f_{n_l}(u)| + |f_{n_l}(u) - f(u)| \le \varepsilon,$$

où $l \in [\![1, k]\!]$ est un entier sur lequel le minimum dans (3.8) est atteint.

Montrons maintenant que les conditions (a) et (b) sont suffisantes pour la compacité de $\mathcal{A}$. Il suffit d'établir que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $f_1, \dots, f_n$ tels que

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(f_j, 3\varepsilon). \tag{3.10}$$

D'après (b), pour tout $u \in X$ il existe un voisinage $V_u \subset X$ tel que (3.7) a lieu. Comme X est compact, il existe $u_1, \dots, u_m \in X$ tels que $X = \bigcup_{l=1}^m V_{u_l}$. Les ensembles $\{f(u_l), f \in \mathcal{A}\}$ sont bornés dans $\mathbb{C}$. Il s'ensuit qu'il existe un nombre fini de fonctions $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{A}$ telles que

$$\min\{|P(f) - P(f_j)|, j = 1, \dots, n\} < \varepsilon, \tag{3.11}$$

où $P(f) = (f(u_1), \dots, f(u_m))$ et $|\cdot|$ désigne la norme dans $\mathbb{C}^m$. Les inégalités (3.7) et (3.11) impliquent que, pour tout $v \in X$, on a

$$|f(v) - f_j(v)| \le |f(v) - f(u_l)| + |f(u_l) - f_j(u_l)| + |f_j(u_l) - f_j(v)| \le 3\varepsilon,$$

où j désigne l'entier sur lequel le minimum dans (3.11) est atteint et l est un entier tel que $v \in V_{u_l}$. Comme v était quelconque, on obtient (3.10). $\square$

Le théorème 3.16 permet d'établir la compacité d'injection de certains espace fonctionnels. Pour $\gamma \in (0, 1]$ et un domaine borné $D \subset \mathbb{R}^d$, on note $C^\gamma(D)$ l'espace des fonctions continues $f : D \to \mathbb{C}$ telles que

$$\|f\|_{C^\gamma} := \sup_{x \in D} |f(x)| + \sup_{x \ne y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\gamma} < \infty.$$

Rappelons qu'une application linéaire $L : X \to Y$ est dite *compacte* si l'image par L de tout ensemble borné dans X est relativement compact dans Y.

Corollaire 3.18. *Pour tout $\gamma \in (0,1]$ et tout domaine borné $D \subset \mathbb{R}^d$, l'injection $C^\gamma(D) \subset C(\overline{D})$ compact.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si $(f_n) \subset C^\gamma(D)$ est une suite bornée, alors il existe une suite extraite qui converge dans $C(\overline{D})$. D'après le théorème 3.16, l'existence d'une telle suite sera établie si on montrer que $\mathcal{A} = (f_n)$ vérifie les propriétés (a) et (b). La validité de (a) est évidente. Pour prouver (b), on remarque qui si $\|f_n\|_{C^\gamma} \le C$, alors

$$|f_n(x) - f_n(y)| \le C\,|x-y|^\gamma \quad \text{pour tous } x, y \in D.$$

Cette inégalité implique immédiatement la propriété (b). □

3.5 Compacité dans les espaces L^p

Le théorème de Arzelà–Ascoli donne une conditions nécessaire et suffisantes pour la compacité d'un sous-ensemble fermé dans $C(X)$. Nous allons établir maintenant un résultat similaire pour les espaces L^p avec $p < \infty$.

Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné et $p \in [1, +\infty[$. Rappelons que toute fonction $f \in L^p(D)$ est continue en moyenne L^p :

$$\omega_f(\delta, p) := \sup_{|y|\le\delta} \left(\int_D |f(x+y) - f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} \to 0 \quad \text{quand } \delta \to 0, \tag{3.12}$$

où on a prolongé f par zéro à $\mathbb{R}^d \setminus D$. Une idée de la démonstration de ce résultat est donnée à la fin de ce paragraphe.

Théorème 3.19. *Soit $\mathcal{A} \subset L^p(D)$ un sous-ensemble fermé borné. Alors $\mathcal{A}$ est compact si et seulement si la convergence* (3.12) *a lieu uniformément par rapport à $f \in \mathcal{A}$.*

Démonstration. Montrons d'abord la nécessité de la condition (3.12). Soit $\varepsilon > 0$ et $\{f_1, \dots, f_n\} \subset \mathcal{A}$ un ensemble fini tel que

$$\min\{\|f - f_j\|_{L^p}, j = 1, \dots, n\} \le \varepsilon \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{A}. \tag{3.13}$$

Comme (3.12) est vrai pour f_j, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|\tau_y f_j - f_j\|_{L^p} \le \varepsilon \quad \text{pour } |y| \le \delta,\ j = 1, \dots, n, \tag{3.14}$$

où $(\tau f)(x) = f(x+y)$. Les inégalités (3.13) et (3.14) impliquent que, pour $f \in \mathcal{A}$ et $|y| \le \delta$, on a

$$\|\tau_y f - f\|_{L^p} \le \|\tau_y (f - f_l)\|_{L^p} + \|\tau_y f_l - f_l\|_{L^p} + \|f_l - f\|_{L^p} \le 3\varepsilon,$$

où $l \in [\![1, n]\!]$ désigne l'entier sur lequel le minimum dans (3.13) est atteint. Comme $\varepsilon > 0$ était quelconque, on conclut que (3.12) a lieu uniformément par rapport à $f \in \mathcal{A}$.

Prouvons maintenant que la convergence (3.12) uniform par rapport à $f \in \mathcal{A}$ est suffisante pour la compacité de $\mathcal{A}$. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction positive portée par la boule $B_{\mathbb{R}^d}(0,1)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \chi \,\mathrm{d}x = 1$ et $\chi_n(x) = n^d \chi(nx)$, où $n \geq 1$ est un entier. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on définit

$$f^{(n)}(x) := (\chi_n * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_n(x-y) f(y) \,\mathrm{d}y.$$

La démonstration du lemme suivant est donnée à la fin de ce paragraphe.

Lemme 3.20. *Pour tout $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(D)$, on a*

$$\|\chi_n * f - f\|_{L^p} \leq \omega_f(n^{-1}, p). \tag{3.15}$$

Comme la convergence (3.12) a lieu uniformément par rapport à $f \in \mathcal{A}$, on voit que

$$\sup_{f \in \mathcal{A}} \|f^{(n)} - f\|_{L^p} \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Comme l'injection $C(\overline{D}) \subset L^p(D)$ est continue, la compacité de $\mathcal{A}$ dans $L^p(D)$ sera donc démontrée si on arrive à établir, pour tout $n \geq 1$, la compacité relative de $\{f^{(n)}, f \in \mathcal{A}\}$ dans $C(\overline{D})$. Pour cela il suffit de remarquer que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left(|f^{(n)}(x)| + \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f^{(n)}(x)| \right) \leq C_n \|f\|_{L^p}$$

et utiliser le théorème de Arzelà–Ascoli. □

Démonstration du lemme 3.20. En utilisant la définition de $\chi_n * f$ et l'inégalité de Hölder, on écrit

$$\begin{aligned}
\|\chi_n * f - f\|_{L^p}^p &= \int_D \left| \int_{\mathbb{R}^d} \chi_n(y)\big(f(x-y) - f(x)\big) \mathrm{d}y \right|^p \mathrm{d}x \\
&\leq \int_D \int_{\mathbb{R}^d} \chi_n(y) \big| f(x-y) - f(x) \big|^p \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0, n^{-1})} \chi_n(y) \int_D \big| f(x-y) - f(x) \big|^p \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\
&\leq \sup_{|y| \leq n^{-1}} \int_D |f(x-y) - f(x)|^p \mathrm{d}x = \omega_f^p(\delta, p).
\end{aligned}$$

□

Idée de la démonstration de la convergence (3.12). On doit montrer que

$$\|\tau_y f - f\|_{L^p} \to 0 \quad \text{quand } |y| \to 0. \tag{3.16}$$

Pour une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ et un entier $N \geq 1$, on pose $f_N(x) = f(x)$ si $|f(x)| \leq N$ et $f_N(x) = 0$ dans le cas contraire. Alors, pour toute fonction $f \in L^p(D)$, on a

$$\sup_{|y| \leq 1} \|\tau_y f - \tau_y f_N\|_{L^p} \to 0 \quad \text{quand } N \to \infty.$$

Il s'ensuit qu'il suffit de prouver (3.16) pour des fonctions bornées. De plus, toute fonction bornée peut être approchée, uniformément par rapport à $x \in D$, par des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques. On conclut donc que la convergence (3.16) sera démontré pour toute fonction $f \in L^p(D)$ si on arrive à l'établir pour la fonction caractéristique de tout sous-ensemble borélien de D.

Il est bien connu que pour tout ensemble borélien $A \subset D$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $G_\varepsilon \subset A$ et un compact $F_\varepsilon \subset A$ tels que $\ell(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$, où ℓ désigne la mesure de Lebesgue. On définit la fonction

$$g_\varepsilon(x) = \frac{d(x, G_\varepsilon^c)}{d(x, F) + d(x, G_\varepsilon^c)}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Alors g_ε est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ telle que $0 \leq g_\varepsilon \leq 1$ et

$$\sup_{|y| \leq 1} \|\tau_y g_\varepsilon - \tau_y I_A\|_{L^p} \leq \ell(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon)^{1/p} < \varepsilon^{1/p},$$

où I_A désigne la fonction caractéristique de A. On voit qu'il suffit d'établir (3.16) pour la fonction continue à support compact g_ε. Dans ce cas, comme D est borné, la propriété requise est une conséquence immédiate de la continuité uniforme de g_ε. $\square$