4 Espaces topologiques vectoriels

Il existe des exemples importants d'espaces vectoriels pour lesquels la notion naturelle de convergence n'est pas engendrée par une norme. C'est le cas, par exemple, de l'espace des fonctions continues ou holomorphes dans un ouvert. Pour traiter ces cas, il est commode d'introduire la notion d'un espace (vectoriel) topologique. Ce chapitre est consacré à l'étude de ce type d'espaces.

4.1 Espaces topologiques

Soit X un ensemble quelconque et τ une famille de sous-ensembles de X. On dit que τ est une *topologie* sur X si il vérifie les trois propriétés suivantes:

- $\varnothing, X \in \tau$;
- **Stabilité par réunion quelconque:** si $\{A_\alpha\} \subset \tau$, alors $\cup_\alpha A_\alpha \in \tau$;
- **Stabilité par intersection finie:** si $A_1, A_2 \in \tau$, alors $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

Dans la suite, on écrira (X, τ) pour souligner la topologie sur X. Un ensemble $A \subset X$ est dit *ouvert* (*fermé*) si $A \in \tau$ ($A^c \in \tau$), où $A^c = X \setminus A$. La *fermeture* (ou l'*adhérence*) de A, noté $\bar{A}$, est définie comme l'intersection de tous les fermés contenant A et l'*intérieur* de A, noté $\mathring{A}$, est la réunion de tous les ouverts inclus dans A. Tout ouvert contenant un point donné $u \in X$ est appelé un *voisinage* de u. On dit que (X, τ) est un *espace de Hausdorff* si tout couple de points distincts possèdent des voisinages distincts.

Exemples 4.1. **(a)** Tout espace métrique est un espace topologique de Hausdorff.

(b) Sur tout ensemble X, il existe deux topologies triviales: $\tau = \{\varnothing, X\}$, la topologie *grossière*, et $\tau = \{\text{tous les sous-ensembles de } X\}$, la topologie *discrète*.

(c) Étant donnée une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de X, on note $\tau(\mathcal{F})$ la topologie minimale contenant $\mathcal{F}$. Il est facile à vérifier que $\tau(\mathcal{F})$ consiste des réunions quelconques des intersections finies d'éléments de $\mathcal{F}$.

(d) Soit $X = [0, 1]$ et $\tau = \{\varnothing \text{ ou } X \backslash B : B \subset X, B \text{ est au plus dénombrable}\}$. Alors (X, τ) est un espace topologique, mais pas un espace de Hausdorff.

Une partie A d'un espace topologique (X, τ) est dite *dense* si tout ouvert de X contient un élément de A. Un espace topologique est dit *séparable* si il existe une suite dense. Un sous-ensemble $\tau' \subset \tau$ est appelée une *base de topologie* si tout élément de τ est une réunion d'éléments de τ'. Une famille γ de voisinages d'un point $u \in X$ est appelée une *base locale au point* u si tout voisinage de u contient un élément de γ. Si $Y \subset X$, alors la famille des ensembles de la forme $Y \cap A$ avec $A \in \tau$ est une topologie sur Y, appelée la *topologie induite*.

Exemples 4.2. **(a)** Si (X, d) est un espace métrique séparable, alors la topologie engendrée par d possède une base dénombrable. Par exemple, on peut prendre toutes les boules ouvertes $B(u_n, r_k)$, où $(u_n) \subset X$ est une suite dense et (r_k) désigne tous les rationnels positifs.

(b) Si X est un espace topologique qui possède une base dénombrable, alors X est séparable. En effet, pour construire une suite dense, il suffit de prendre une base dénombrable τ' et choisir un point dans chaque élément de τ'.

On dit qu'une suite $(u_n) \subset X$ *converge vers* $u \in X$ si tout voisinage de u contient tous les éléments de la suite à partir d'un certain rang. Soit (Y, σ) un autre espace topologique et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est *continue* si $f^{-1}(A) \in \tau$ pour tout $A \in \sigma$.

Exercice 4.3. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes pour une application $f : X \to Y$.

(a) f est continue;

(b) l'image réciproque par f d'un fermé de Y est un fermé de X.

(c) pour tout $u \in X$ et tout voisinage U de $f(u)$ il existe un voisinage de V de u tel que $f(V) \subset U$.

Montrer aussi que si tout point de X possède une base locale dénombrable, alors f est continue si et seulement si pour toute suite $(u_n) \subset X$ qui converge vers un élément $u \in X$ la suite $(f(u_n))$ converge dans Y vers $f(u)$.

Rappelons qu'une famille $\{B_i, i \in \mathcal{I}\}$ de sous-ensembles de X est appelée un *recouvrement* de $A \subset X$ si $A \subset \cup_{i \in \mathcal{I}} B_i$. Une partie A de X est dite *compacte* si tout recouvrement de A par des ouverts contient un sous-recouvrement fini.

Proposition 4.4. *Soit X un espace de Hausdorff et $A \subset X$ un compact. Alors A est fermé.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $v \in A^c$ il existe un voisinage V de v tel que $A \cap V = \varnothing$. Comme X est un espace de Hausdorff, pour tout $u \in A$ il existe deux ouverts W_u et V_u contenant les points u et v tels que $W_u \cap V_u = \varnothing$. Alors $\{W_u, u \in A\}$ est un recouvrement ouvert de A. Comme A est compact, il existent $\{u_1, \dots, u_n\} \subset A$ tels que $A \subset \bigcup_j W_{u_j}$. On pose $V = \bigcap_j V_{u_j}$. Alors V satisfait les propriétés requises. $\square$

4.2 Espaces vectoriels topologiques

On considère maintenant le cas où X est un espace vectoriel. Pour simplifier les notations, on considère le cas complexe; tous les résultats restent vrais dans le cas réels. Soit τ une topologie sur X vérifiant les deux propriétés suivantes:

- tout singleton $\{u\}$ est un fermé de X;
- les opérations d'addition et multiplication par un scalaire sont des applications continues.

Dans ce cas, on appelle (X, τ) un *espace vectoriel topologique* (EVT). Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit *borné* si pour tout voisinage V de zéro il existe $s > 0$ tel que $A \subset tV$ pour tout $t \geq s$. Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit *convexe* si pour tous $u, v \in A$ le segment $[u, v] = \{tu + (1-t)v : t \in [0,1]\}$ appartient à A. Enfin, $A \subset X$ est dit *équilibré* si $\lambda A \subset A$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant l'inégalité $|\lambda| \leq 1$.

Proposition 4.5. *Soit X un EVT, $a \in X$ et $\lambda \neq 0$. Alors les applications*

$$T_a(u) = u + a, \quad M_\lambda(u) = \lambda u, \quad u \in X, \tag{4.1}$$

sont des homéomorphismes de X.

Démonstration. Le fait que T_a et M_λ sont des bijections est évident. Il est facile à vérifier que $(T_a)^{-1} = T_{-a}$ et $(M_\lambda)^{-1} = M_{1/\lambda}$. La continuité des opérations vectorielles implique que T_a et M_λ sont des fonctions continues. Il s'ensuit que T_a et M_λ sont des homéomorphismes. $\square$

Une conséquence immédiate de ce résultat est ce que la topologie est *invariante* par translation et multiplication; c'est-à-dire, un ensemble $A \subset X$ est ouvert si et seulement si $T_a(A)$ (ou $M_\lambda(A)$) l'est. Il s'ensuit que la topologie τ est entièrement définie par une base locale en zéro. Dans la suite, une *base locale* d'un EVT signifie une base locale au point zéro.

Exercice 4.6. Montrer que si (X, τ) est un EVT et τ' est une base locale, alors tout ouvert $A \in \tau$ est représentable sous la forme $A = \cup_{u \in A}(u + V_u)$, où $V_u \in \tau'$.

Définition 4.7. Soit (X, τ) un EVT. On dit que:

(a) X est *localement convexe* si il existe une base locale dont les éléments sont convexes.

(b) X est *localement borné* si le point zéro possède un voisinage borné.

(c) X est *localement compact* si le point zéro possède un voisinage dont l'adhérence est compacte.

(d) X est *métrisable* si sa topologie τ est engendrée par une métrique d sur X.

(e) X est un *F-espace* si sa topologie est engendrée par une métrique invariante d par rapport à laquelle X est complet.

(f) X est un *espace de Fréchet* si X est un F-espace localement convexe.

(g) X est *normable* si il existe une norme sur X dont la topologie est confondue avec τ.

(h) X possède la *propriété de Heine–Borel* si tout ensemble fermé borné est compact.

Exemples 4.8. **Espace des fonctions continues.** Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $C(D)$ l'espace des fonctions continues $f : D \to \mathbb{C}$. On note (K_n) une suite croissante de compacts inclus dans D tels que $\cup_n K_n = D$. On introduit les semi-normes[1]

$$p_n(f) = \sup_{x \in K_n} |f(x)|, \quad n \geq 1.$$

Une base locale sur $C(D)$ est définie par $U(n) = \{f \in C(D) : p_n(f) < 1/n\}$. Une suite $(f_j) \subset C(D)$ converge vers zéro pour cette topologie si les restrictions des f_j à tout ensemble compact de D converge vers zéro. Montrons que c'est un espace de Fréchet. En effet, on introduit une fonction $d : C(D) \times C(D) \to \mathbb{R}_+$ par la formule

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}. \tag{4.2}$$

Il est facile à vérifier que c'est une métrique sur $C(D)$ et que sa topologie est confondue avec celle engendrée par la base locale $\{U(n), n \geq 1\}$.

Espace des fonctions holomorphes. Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $H(D)$ l'espace des fonctions holomorphes $f : D \to \mathbb{C}$. Comme la limite localement uniforme d'une suite de fonctions holomorphes est holomorphe, $H(D)$ est un sous-espace fermé de $C(D)$. On voit que $H(D)$ est un espace de Fréchet.

Espaces des fonctions infiniment différentiables. Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et (K_i) une suite croissante de compacts $K_i \subset D$ telle que $\bigcup_i K_i = D$. On note $C^\infty(D)$ l'espace des fonctions $f : D \to \mathbb{C}$ infiniment différentiables, avec une base locale (V_N) donnée par

$$V_N = \{f \in C^\infty(D) : p_N(f) < 1/N\}, \quad p_N(f) = \max_{|\alpha| \leq N} \max_{x \in K_N} |\partial^\alpha f(x)|,$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ et $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_1}^{\alpha_d}$. C'est un espace de Fréchet vérifiant la propriété de Heine–Borel.

Espace $L^p(D)$ avec $0 < p < 1$. Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $L^p(D)$ l'espace des classes d'équivalence de fonctions boréliennes $f : D \to \mathbb{C}$ telles que

$$d_p(f) := \int_D |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty.$$

Il est facile à voir que la fonction $d_p(f,g) = d_p(f-g)$ définit une métrique invariante sur $L^p(D)$. La démonstration du théorème de Riesz–Markov (voir § I.9 dans [Yos95]) reste vraie dans ce cas, et l'espace $L^p(D)$ est donc complet.

Exercice 4.9. Montrer que $L^p(D)$ est un F-espace localement borné.

Espaces locaux de Sobolev. Pour $p \in [1, +\infty]$ et un entier $k \geq 0$, on note $W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ l'espace de fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dont la restriction à tout interval borné $I \subset \mathbb{R}$ appartient à $W^{k,p}(I)$. On munit cet espace de la métrique

$$d_{k,p}(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|f-g\|_{W^{k,p}(I_n)}}{1+\|f-g\|_{W^{k,p}(I_n)}},$$

où $I_n = (-n, n)$. Il est facile à vérifier que $W^{k,p}(\mathbb{R})$ est un espace de Fréchet.

[1]Rappelons qu'une fonction p sur un espace vectoriel X à valeurs positives est appelée une *semi-norme* si $p(\lambda u) = |\lambda| p(u)$ et $p(u+v) \leq p(u) + p(v)$.

4.3 Propriétés de séparation

Théorème 4.10. *Soit X un EVT, $K \subset X$ un compact et $F \subset X$ un fermé tels que $K \cap F = \varnothing$. Alors il existe un voisinage de zéro V tel que*

$$(K+V) \cap (F+V) = \varnothing.$$

Ce résultat implique immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 4.11. *Soit X un EVT. Alors:*

- *X est un espace de Hausdorff;*
- *tout élément d'une base locale $\mathcal{B}$ contient l'adhérence d'un autre élément de $\mathcal{B}$.*

La démonstration du théorème 4.10 est basée sur le lemme suivant.

Lemme 4.12. *Soit W un voisinage de zéro dans un EVT X. Alors il existe un voisinage de zéro $U \subset X$ tel que $U = -U$ et $U + U \subset W$.*

Démonstration. Comme $0 + 0 = 0$, la continuité de l'addition implique qu'il existe un voisinage de zéro V tel que $V + V \subset W$. Il est facile à voir que $U = V \cap (-V)$ possède les propriétés requises. □

Démonstration du théorème 4.10. Soit $u \in K$. D'après le lemme 4.12, il existe un voisinage de zéro V_u tel que $V_u = -V_u$ et $u + V_u + V_u + V_u \subset X \setminus F$. Il s'ensuit que

$$(u + V_u + V_u) \cap (F + V_u) = \varnothing. \tag{4.3}$$

Comme K est compact, il existe un ensemble fini $\{u_1, \dots, u_n\} \subset K$ tel que

$$K \subset (u_1 + V_{u_1}) \cup \cdots \cup (u_n + V_{u_n}).$$

Soit $V = V_{u_1} \cap \cdots \cap V_{u_n}$. Alors

$$K + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} (u_i + V_{u_i} + V) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (u_i + V_{u_i} + V_{u_i}).$$

D'après (4.3), les termes dans le membre de droite de cette inclusion n'ont pas d'intersection avec $F + V$, d'où le résultat. □

Exercice 4.13. Montrer que les propriétés suivantes sont vraies pour tout espace vectoriel topologique X.

- **(a)** Si $A \subset X$, alors $\bar{A} = \bigcap_V (A + V)$, où l'intersection est prise pour tous les voisinages de zéro V.
- **(b)** Si $A, B \subset X$, alors $\bar{A} + \bar{B} \subset \overline{A + B}$.
- **(c)** Si Y est un sous-espace vectoriel de X, alors $\overline{Y}$ l'est aussi.

(d) Si A est convexe, alors $\bar{A}$ et A° le sont aussi.

(e) Si A est borné, alors $\bar{A}$ l'est aussi.

(f) Si A est équilibré, alors $\bar{A}$ l'est aussi; si en plus $0 \in A^\circ$, alors A° est équilibré.

Théorème 4.14. *Soit X un EVT et V un voisinage de zéro. Alors les propriétés suivantes ont lieu.*

(a) *Si $(r_n) \subset \mathbb{R}_+^*$ est une suite croissante qui converge vers l'infini, alors*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V.$$

(b) *Tout ensemble compact de X est borné.*

(c) *Si $(\delta_n) \subset \mathbb{R}_+^*$ est une suite décroissante et V est borné, alors la famille $\{\delta_n V, n \geq 1\}$ est une base locale de X.*

Démonstration. **(a)** Soit $u \in X$. Comme l'application $\alpha \mapsto \alpha u$ est continue, l'ensemble $\{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha u \in V\}$ est ouvert. En plus, il contient le point zéro et donc $u/r_n \in V$ pour $n \gg 1$, d'où on conclut que $u \in r_n V$.

(b) Remarquons d'abord qu'il existe une base locale de X composée de voisinages équilibrés. En effet, soit $U \subset X$ un voisinage de zéro. Comme l'application $(\alpha, u) \mapsto \alpha u$ est continue, il existe $\delta > 0$ et un voisinage de zéro V tels que $\alpha u \in U$ pour $|\alpha| < \delta$ et $u \in V$. Soit W la réunion de tous ces ensembles αV, $|\alpha| < \delta$. Alors W est un voisinage équilibré de zéro contenu dans U.

Soit maintenant $K \subset X$ un compact et U un voisinage de zéro. Alors il existe un voisinage équilibré W de zéro tel que $W \subset U$. D'après la propriété (a), on a $K \subset \bigcup_{n \geq 1} nW$. Comme K est compact et W est équilibré, il existe $n_1 < \cdots < n_s$ tels que $K \subset n_1 W \cup \cdots \cup n_s W = n_s W$. Si $t > n_s$, alors $K \subset tW \subset tU$.

(c) Soit $U \subset X$ un voisinage de zéro. Comme V est borné, il existe $s > 0$ tel que $V \subset tU$ pour $t > s$. Il s'ensuit que $V \subset \delta_n^{-1} U$ pour $\delta_n < 1/s$. On voit que U contient les ensembles $\delta_n V$ pour $n \gg 1$. □

Théorème 4.15. *Soit X un EVT et $A \subset X$. Alors A est borné si et seulement si pour toutes suites $(u_n) \subset A$ et $(\alpha_n) \subset \mathbb{C}$ vérifiant $\alpha_n \to 0$ on a $\alpha_n u_n \to 0$.*

Démonstration. Supposons d'abord que A est borné. Si $V \subset X$ est un voisinage équilibré de zéro, alors $A \subset tV$ pour $t \gg 1$. La convergence $\alpha_n \to 0$ implique qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $|\alpha_n| t < 1$ pour $n \geq N$. Comme $t^{-1} A \subset V$ et V est équilibré, on conclut que $\alpha_n u_n \in V$ pour $n > N$ et donc $\alpha_n u_n \to 0$.

Supposons maintenant que A n'est pas borné. Alors il existe un voisinage de zéro $V \subset X$ et une suite $r_n \to +\infty$ tels que A n'est pas inclut dans $r_n V$. Soit $u_n \in A \setminus (r_n V)$. Alors $r_n^{-1} \to 0$ et $r_n^{-1} u_n \notin V$, ce qui signifie que la suite $(r_n^{-1} u_n)$ ne converge pas vers zéro. □

4.4 Espaces de dimension finie

Considérons l'espace $\mathbb{C}^n$ munie de la norme

$$\|z\| = \big(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2\big)^{1/2}, \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Il est bien connu que toutes les autres normes sont équivalentes à $\|\cdot\|$. Nous allons montrer que la topologie définie par $\|\cdot\|$ est la seule topologie vectorielle sur $\mathbb{C}^n$.

Théorème 4.16. *Soit X un EVT et Y un sous-espace de dimension finie n. Alors Y est fermé, et toute bijection linéaire de $\mathbb{C}^n$ sur Y est un homéomorphisme.*

Démonstration. La démonstration est par récurrence. La propriété énoncée est évidente pour $n = 1$. On suppose maintenant que $n \geq 2$. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base standard de $\mathbb{C}^n$. Alors

$$L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n, \quad f_k = Le_k.$$

Comme L est une bijection linéaire, les vecteurs $\{f_1, \ldots, f_n\}$ forment une base de X. Il existe donc des fonctionnelles linéaires $\gamma_k : Y \to \mathbb{C}$ telles que

$$u = \gamma_1(u) f_1 + \cdots + \gamma_n(u) f_n.$$

Il est facile à voir que $\mathcal{N}(\gamma_k)$ est un sous-espace de Y de dimension $n-1$. Par l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{N}(\gamma_k)$ est fermé, et d'après le théorème 4.20 (voir plus bas), γ_k est continue. Comme

$$L^{-1}u = \big(\gamma_1(u), \ldots, \gamma_n(u)\big), \quad u \in Y.$$

on conclut que L^{-1} est continue aussi.

Il nous reste à montrer que Y est un sous-espace fermé. Soit $u \in \overline{Y}$. On note $K = L(S)$, où $S \subset \mathbb{C}^n$ désigne la sphère unité. Alors K est compact, et il existe un voisinage de zéro équilibré tel que $V \cap K = \varnothing$. Soit $t > 0$ tel que $u \in tV$. Alors u appartient à l'adhérence de l'ensemble

$$Y \cap (tV) \subset L(tB) \subset L(t\overline{B}),$$

où $B \subset \mathbb{C}^n$ désigne la boule unité. Comme $t\overline{B}$ et donc son image $L(t\overline{B})$ sont des ensembles compacts, on conclut que $L(t\overline{B})$ est fermé. On obtient donc l'inclusion $u \in L(t\overline{B}) \subset Y$. $\square$

Théorème 4.17. *Tout EVT localement compact est de dimension finie.*

Corollaire 4.18. *Tout EVT localement borné vérifiant la propriété de Heine–Borel est de dimension finie.*

Démonstration. Soit $V \subset X$ un voisinage borné de zéro. Alors son adhérence $\overline{V}$ est aussi bornée et donc, d'après la propriété de Heine–Borel, elle est compacte. On conclut que X est localement compact, et d'après le théorème 4.17, on a $\dim X < \infty$. $\square$

Démonstration du théorème 4.17. Soit $V \subset X$ un voisinage de zéro dont l'adhérence est compacte. Comme $\overline{V} \subset \bigcup_{u\in\overline{V}}(u + \frac{1}{2}V)$, il existe $u_1, \dots, u_m \in X$ tels que

$$\overline{V} \subset \bigcup_{j=1}^{m}(u_j + \frac{1}{2}V). \tag{4.4}$$

Soit Y l'espace vectoriel engendré par $u_1, \dots, u_m$. Alors $\dim Y \le m$ et $\overline{Y} = Y$. Si on montrer que $V \subset \overline{Y}$, alors on aura que $X = Y$.

Il s'ensuit de (4.4) que $V \subset Y + \frac{1}{2}V$. Comme $\lambda Y = Y$ pour $\lambda \neq 0$, on obtient $\frac{1}{2}V \subset Y + \frac{1}{4}V$, d'où on voit que

$$V \subset Y + \frac{1}{2}V \subset Y + Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V.$$

Par récurrence, on montre que $V \subset Y + 2^{-n}V$ et donc

$$V \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}(Y + 2^{-n}V).$$

Comme $\{2^{-n}V\}$ est une base locale (voir le théorème 4.14), le membre de droite est confondue avec $\overline{Y}$. □

4.5 Applications linéaires

Soient X et Y deux EVT et $f : X \to Y$ une fonction. On dit que f est un *application linéaire* si

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \quad \text{pour } \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ u, v \in X.$$

Une application linéaire de X dans $\mathbb{C}$ est appelée une *fonctionnelle linéaire*.

Exercice 4.19. Montrer que les propriétés suivantes ont lieu pour toute application linéaire $L : X \to Y$.

- Si $A \subset X$ est un sous-espace vectoriel (ou un ensemble convexe ou équilibré), alors la même propriété est vraie pour $L(A)$.
- Si $B \subset Y$ est un sous-espace vectoriel (ou un ensemble convexe ou équilibré), alors la même propriété est vraie pour $L^{-1}(B)$.

Il est facile à voir que la continuité d'une application linéaire $L : X \to Y$ au point zéro implique sa continuité uniforme au sens suivant: pour tout voisinage de zéro $W \subset Y$ il existe un voisinage de zéro $V \subset X$ tel que $Lv \in Lu + W$ pour tout $u, v \in X$ vérifiant $v \in u + V$. Le théorème suivant donne des conditions équivalentes pour la continuité d'une fonctionnelle linéaire.

Théorème 4.20. *Soit X un EVT et $L : X \to \mathbb{C}$ une fonctionnelle linéaire non triviale. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) *L est continue.*

(b) *Le sous-espace* $\mathcal{N}(L) = \{u \in X : Lu = 0\}$ *est fermé.*

(c) $\mathcal{N}(L)$ *n'est pas dense dans* X.

(d) L *est borné sur un voisinage de zéro.*

Démonstration. **(a)** $\Rightarrow$ **(b)** Comme L est continue, l'image réciproque de tout fermé est fermé. En particulier, $\mathcal{N}(L) = L^{-1}(\{0\})$ est un espace vectoriel fermé.

(b) $\Rightarrow$ **(c)** Si $\mathcal{N}(L)$ est dense, alors $\mathcal{N}(L) = X$, et on obtient une contradiction avec l'hypothèse que L ne soit pas triviale.

(c) $\Rightarrow$ **(d)** Comme $\mathcal{N}(L)$ n'est pas dense, il existe un voisinage de zéro équilibré $V \subset X$ et un point $u \in X$ tels que $(u + V) \cap \mathcal{N}(L) = \varnothing$. Alors $L(V) \subset \mathbb{C}$ est un voisinage équilibré de $0 \in \mathbb{C}$. Si $L(V) = \mathbb{C}$, alors il existe $v \in V$ tel que $Lv = -Lu$, d'où on voit que $u + v \in \mathcal{N}(L)$. La contradiction obtenue montre que $L(V)$ est borné.

(d) $\Rightarrow$ **(a)** Il suffit de montrer que L est continue en zéro. Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'hypothèse, il existe un voisinage de zéro $V \subset X$ tel que $|Lu| \leq 1$ pour tout $u \in V$. Alors $|Lu| \leq \varepsilon$ pour tout $u \in \varepsilon V$. $\square$

Une application linéaire $L : X \to Y$ est dite *bornée* si l'image par L d'un ensemble borné dans X est bornée dans Y.

Théorème 4.21. *Soient* X, Y *des EVT et* $L : X \to Y$ *une application linéaire. Alors chacune des propriétés ci-dessous implique la suivante:*

(a) L *est continue.*

(b) L *est bornée.*

(c) *Si une suite* $(u_n) \subset X$ *converge vers zéro, alors* (Lu_n) *est bornée.*

Si, en plus, X *est métrisable, et la métrique correspondante est invariante par translations, alors ces propriétés sont équivalentes à la suivante:*

(d) *Si une suite* $(u_n) \subset X$ *converge vers zéro, alors* $Lu_n \to 0$.

Démonstration. **(a)** $\Rightarrow$ **(b)** Soit A un ensemble borné et $W \subset Y$ un voisinage de zéro. Comme L est continue et $L0 = 0$, il existe un voisinage de zéro $V \subset X$ tel que $L(V) \subset W$. Comme A est borné, il existe $t > 0$ tel que $A \subset sV$ pour $s > t$. Il s'ensuit que $L(A) \subset L(sV) = sL(V) \subset sW$ pour $s > t$, d'où on conclut que $L(A)$ est borné.

(b) $\Rightarrow$ **(c)** Comme les suites convergentes sont bornées, on voit que (b) implique (c).

(c) $\Rightarrow$ **(d)** Supposons maintenant que X est métrisable et (u_n) est une suite qui converge vers zéro. Montrons d'abord qu'il existe une suite $(\gamma_n) \subset \mathbb{R}_+$ qui converge vers $+\infty$ telle que $\gamma_n u_n \to 0$. En effet, soit d une métrique dont la topologie est confondue avec celle de X. Comme $d(u_n, 0) \to 0$, il existe une suite croissante (n_k) de nombres entiers telle que $d(u_n, 0) < k^{-2}$ pour $n \geq n_k$. On pose $\gamma_n = k$ pour $n_k \leq n < n_{k+1}$. Alors

$$d(\gamma_n u_n, 0) = d(k u_n, 0) \leq k d(u_n, 0) < k^{-1} \quad \text{pour } n_k \leq n < n_{k+1}.$$

On conclut que $\gamma_n u_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

D'après (c), la suite $L(\gamma_n u_n)$ est bornée, d'où on voit que $Lu_n = \gamma_n^{-1} L(\gamma_n u_n)$ converge vers zéro quand $n \to \infty$.

(d) ⇒ (a) Si (a) est faux, alors il existe un voisinage de zéro $W \subset Y$ telle que $L^{-1}(W)$ ne contient pas de voisinage de zéro dans X. Comme X possède une base locale dénombrable, il existe un suite $(u_n) \subset X$ telle que $u_n \to 0$, mais $Lu_n \notin W$ et donc (Lu_n) ne converge pas vers zéro. La contradiction obtenue termine la démonstration du théorème. □

4.6 Semi-normes et convexité locale

Enonçons d'abord (sans démonstration) le résultat suivant sur la métrisabilité d'un espace topologique; voir le théorème 1.24 dans [Rud73].

Théorème 4.22. *Soit X un EVT avec une base locale dénombrable. Alors il existe une métrique d sur X telle que:*

(a) *la topologie de d est confondue avec celle de X;*

(b) *les boules ouvertes de centre zéro sont des ensembles équilibrés;*

(c) *d est invariante par translations; c'est-à-dire, $d(u + w, v + w) = d(u, v)$ pour tous $u, v, w \in X$.*

De plus, si X est localement convexe, alors on peut construire d qui vérifie en plus la propriété suivante :

(d) *les boules ouvertes sont convexes.*

On étudie maintenant la question d'existence d'une norme qui est compatible avec la topologie d'un EVT. Pour cela, on aura besoin de la notion d'une fonctionnelle de Minkowski.

Définition 4.23. Un ensemble $A \subset X$ est dit *absorbant* si pour tout $u \in X$ il existe $t = t(u) > 0$ tel que $u \in tA$. La *fonctionnelle de Minkowski* d'un ensemble absorbant est définie par la relation (2.12) (dans laquelle $K = A$.

Exercice 4.24. Soit X un EVT et p une semi-norme sur X. Établir les propriétés suivantes:

(a) $p(0) = 0$ et $|p(u) - p(v)| \leq p(u - v)$ pour tous $u, v \in X$.

(b) L'ensemble $\{u \in X : p(u) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel.

(c) L'ensemble $B = \{u \in X : p(u) \leq 1\}$ est convexe, équilibré et absorbant. De plus, la fonctionnelle de Minkowski de B est confondue avec p.

Proposition 4.25. *Soit A un ensemble convexe absorbant dans un espace vectoriel X. Alors les propriété suivantes ont lieu.*

(a) $\mu_A(u+v) \leq \mu_A(u) + \mu_A(v)$ *pour tous* $u, v \in X$.

(b) $\mu_A(tu) = t\mu_A(u)$ *pour* $u \in X$ *et* $t \geq 0$.

(c) *Si A est équilibré, alors μ_A est une semi-norme.*

(d) *Si* $B = \{u \in X : \mu_A(u) < 1\}$ *et* $C = \{u \in X : \mu_A(u) \leq 1\}$, *alors* $B \subset A \subset C$ *et* $\mu_A = \mu_B = \mu_C$.

Démonstration. **(a)** Pour tout $u \in X$, on pose $H_A(u) = \{t > 0 : t^{-1}u \in A\}$. Si $t \in H_A(u)$, alors $s \in H_A(u)$ pour tout $s > t$. Il s'ensuit que $H_A(u) = [\mu_A(u), \infty[$ ou $H_A(u) =]\mu_A(u), \infty[$.

Soit maintenant $s > \mu_A(u)$ et $t > \mu_A(v)$. Alors $s^{-1}u \in A$, $t^{-1}v \in A$, et la convexité de A implique que

$$(t+s)^{-1}(u+v) = \frac{s}{s+t}(s^{-1}u) + \frac{s}{s+t}(t^{-1}v) \in A.$$

On voit que $\mu_A(u+v) \leq s+t$. Comme s et t étaient quelconques, on obtient le résultat cherché.

La propriété (b) est évidente, et (c) est une conséquence de (a) et (b).

(d) Si $\mu_A(u) < 1$, alors $1 \in H_A(u)$ et donc $u \in A$. De plus, si $u \in A$, alors $\mu_A(u) \leq 1$, et on conclut que $B \subset A \subset C$. Cette inclusion implique que $H_B(u) \subset H_A(u) \subset H_C(u)$ et donc $\mu_C(u) \leq \mu_A(u) \leq \mu_B(u)$. Pour établir l'égalité cherchée, il suffit de démontrer que $\mu_B(u) \leq \mu_C(u)$.

Soit $\mu_C(u) < s < t$. Alors $s^{-1}u \in C$ et $\mu_A(s^{-1}u) \leq 1$. Il s'ensuit que $\mu_A(t^{-1}u) \leq \frac{s}{t} < 1$. On voit que $t^{-1}u \in B$, $\mu_B(t^{-1}u) \leq 1$ et $\mu_b(u) \leq t$. Comme $t > \mu_B(u)$ était quelconque, on obtient le résultat cherché. $\square$

Il se trouve que tout espace localement convexe possède une famille de semi-normes qui sépare[2] les points. Réciproquement, toute famille de semi-normes qui sépare les points peut être utilisée pour définir une topologie sur X par rapport à laquelle les semi-normes sont continues. Ces résultats sont démontrés dans les deux théorèmes suivants.

Théorème 4.26. *Soit $\mathcal{B}$ une base locale composée de voisinages convexes équilibrés. Alors $V = \{u \in X : \mu_V(u) < 1\}$ pour tout $V \in \mathcal{B}$, et $\{\mu_V, V \in \mathcal{B}\}$ est une famille de semi-normes continues qui sépare les points.*

Démonstration. Si $u \in V$, alors il existe $t < 1$ tel que $u/t \in V$. Il s'ensuit que $\mu_V(u) < 1$. Si $\mu \notin V$, alors l'inclusion $u/t \in V$ implique que $t \geq 1$, car V est équilibré, et donc $\mu_V(u) \geq 1$.

[2]On dit qu'une famille de semi-normes $\mathcal{P}$ sur un espace vectoriel X *sépare les points* si pour tout $u \in X$ il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $p(u) \neq 0$.

La proposition 4.25 montre que μ_V est une semi-norme. On fixe maintenant $\varepsilon > 0$. Si $u - v \in \varepsilon V$, alors il s'ensuit du point (a) de l'exercice 4.24 que

$$|\mu_V(u) - \mu_V(v)| \leq \mu_V(u - v) < \varepsilon,$$

d'où on conclut que μ_V est continu. Si $u \in X$ est un élément non nul, alors il existe $V \in \mathcal{B}$ tel que $u \notin V$, et donc $\mu_V(u) \geq 1$. On conclut que la famille $\{\mu_V\}$ sépare les points. □

Théorème 4.27. *Soit X un espace vectoriel et $\mathcal{P}$ une famille de semi-normes qui sépare les points. On note $\mathcal{B}$ la famille de toutes les intersections finies d'ensembles de la forme*

$$V(p, n) = \{u \in X : p(u) < 1/n\}, \quad p \in \mathcal{P}, \quad n \geq 1.$$

Alors $\mathcal{B}$ est une base locale d'une topologie localement convexe sur X telle que

(a) *toute semi-norme $p \in \mathcal{P}$ est continue;*

(b) *un sous-ensemble $A \subset X$ est borné si et seulement si toute semi-norme $p \in \mathcal{P}$ est bornée sur A.*

Démonstration. On note τ la famille des réunions quelconques de translations d'éléments de $\mathcal{B}$. Alors τ est une topologie sur X invariante par translations, les éléments de $\mathcal{B}$ sont convexes et équilibrés et forment une base locale pour τ. Nous allons montrer que (X, τ) est un espace vectoriel et que les propriétés (a) et (b) ont lieu.

Montrons que des singletons sont fermés. En effet, soit $u \in X$, $u \neq 0$. Alors il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $p(u) \neq 0$. Comme $u \notin V(p, n)$ pour $np(u) > 1$, le point zéro est dans le voisinage $u - V(p, n)$ de u, et donc u n'est dans l'adhérence de u. On conclut que $\{0\}$ est ferme. Comme la topologie est invariant par translations, tous les singletons sont fermés.

Montrons que l'addition est continue. Soit U un voisinage de zéro. Alors il existe $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ et $n_1, \dots, n_k \geq 1$ tels que

$$U \supset V(p_1, n_1) \cap \dots \cap V(p_k, n_k). \tag{4.5}$$

Soit $V = V(p_1, 2n_1) \cap \dots \cap V(p_k, 2n_k)$. Alors la subadditivité des seminormes p implique que $V + V \subset U$. On obtient donc la continuity de l'addition au point $(0, 0)$ et, par invariance, en tout point $(u, v) \in X \times X$.

Montrons que la multiplication par un scalaire est continue. Soit $u \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et U, V les voisinages définis ci-dessous. Alors $u \in sV$ pour un $s > 0$. Si $|\beta - \alpha| < 1/s$ et $v \in u + tV$, où $t = \frac{s}{1+|\alpha|s}$, alors l'inégalité $|\beta|t \leq 1$ et le fait que V est équilibré impliquent que le vecteur $\beta v - \alpha u = \beta(v - u) + (\beta - \alpha)u$ appartient à l'ensemble

$$|\beta|tV + |\beta - \alpha|sV \subset V + V \subset U.$$

Nous avons établit que X est un EVT localement convexe. La définition de $V(p,n)$ implique que tout $p \in \mathcal{P}$ est continu en zéro. Il s'ensuit de linégalité $|p(u) - p(v)| \leq p(u-v)$ que p est continu sur X et donc (a) est vrai.

Montrons enfin la propriété (b). Supposons que A est borné. On fixe $p \in \mathcal{P}$. Comme $V(p,1)$ est un voisinage de zéro, on a $A \subset kV(p,1)$ pour un entier $k \geq 1$. On voit que $p(u) < k$ pour $u \in A$, ce qui signifie que p est borné sur A. Réciproquement, soit $A \subset X$ un sous-ensemble tel que tout $p \in \mathcal{P}$ est borné sur A. Soit U un voisinage de zéro, vérifiant (4.5). Soit $M_i > 0$ tel que $p_i < M_i$ sur A. Alors pour $n > \max\{n_1 M_1, \ldots, n_k M_k\}$ on a $A \subset nU$, et on conclut que A est borné. □

Théorème 4.28. *Soit X un EVT. Alors X est normable si et seulement si son origine possède un voisinage convexe borné.*

Démonstration. Il est clair que si $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace X qui engendre sa topologie, alors la boule $\{u \in X : \|u\| < 1\}$ est un voisinage borné de zéro.

Supposons maintenant que X possède un voisinage convexe borné de zéro. Supposons que nous avons construit un voisinage de zéro $U \subset V$ convexe équilibré. Comme $U \subset V$, U est borné aussi. On pose $\|u\| = \mu_U(u)$. Montrons que $\|\cdot\|$ est une norme et que la topologie est confondue avec celle de X.

D'après le théorème 4.14, les ensembles $\{rU, r > 0\}$ forment une base locale de X. Si $u \neq 0$, alors il existe $r > 0$ tel que $u \notin rU$ et $\|u\| \geq r$. La proposition 4.25 implique que $\|\cdot\|$ est une norme. De plus, $\{u \in X : \|u\| < r\} = rU$, et on voit que la famille de boules pour la norme $\|\cdot\|$ définit la même base locale que $\{rU\}$. Il s'ensuit que les topologies correspondantes sont confondues.

Il nous reste à construire U. On définit $A = \bigcap_{|\alpha|=1} (\alpha V)$. Nous allons montrer que l'intérieur de A, noté U, vérifie les propriétés requises. Il est clair que A est convexe et, d'après l'exercice 4.13, son intérieur l'est aussi. De plus, l'argument utilisé dans la démonstration du théorème 4.14 montre qu'il existe un voisinage de zéro W inclut dans A. Si $|\beta| \leq 1$, alors

$$\beta A = \bigcap_{|\alpha|=1} (\beta\alpha V) = |\beta| \bigcap_{|\alpha|=1} (\alpha V) \subset \bigcap_{|\alpha|=1} (\beta\alpha V) = A,$$

d'où on conclut que A est équilibré. Comme $0 \in W \subset U$, d'après l'exercice 4.13 on a que U est équilibré. □

4.7 Espaces produits et espaces quotients

Soient (X_1, τ_1) et (X_2, τ_2) deux EVT. Alors il existe une topologie naturelle τ sur le produit direct $X_1 \times X_2$: on définit τ comme la topologie engendrée par les ensembles $U_1 \times U_2$, où $U_i \in \tau_i$, $i = 1, 2$. On appelle (X, τ) le *produit* des espaces X_1 et X_2.

Exercice 4.29. Montrer que si X_i, $i = 1, 2$, sont deux EVT qui possèdent l'une des propriétés mentionnées dans la définition 4.7, alors leur produit $X_1 \times X_2$ vérifie la même propriété.

On définit maintenant l'espace *quotient* et sa topologie. Soit (X, τ) un EVT et $N \subset X$ un sous-espace fermé. On note X/N l'espace quotient (de X modulo N) et τ_N la famille de sous-ensembles $A \subset X/N$ tels que $\pi^{-1}(A) \in \tau$, où $\pi : X \to X/N$ le projecteur naturel.

Théorème 4.30. *Soit (X, τ) un EVT et N un sous-espace fermé. Alors les propriétés suivantes ont lieu.*

- **(a)** *La famille τ_N est une topologie sur l'espace X/N. De plus, l'application $\pi : X \to X/N$ est linéaire, continue et ouverte.*[3]
- **(b)** *Si $\mathcal{B}$ est une base locale pour X, alors la famille $\{\pi(V), V \in \mathcal{B}\}$ est une base locale dans X/N.*
- **(c)** *Si X est localement convexe (localement compact, localement borné, métrisable avec une métrique invariante, normable), alors X/N l'est aussi.*
- **(d)** *Si X est un F-espace (espace de Fréchet, de Banach), alors il en est de même pour X/N.*

Dans la suite, on appelle τ_N la *topologie quotient*.

Démonstration. **(a)** Il est facile à voir que $\pi^{-1}(A \bigcap B) = \pi^{-1}(A) \bigcap \pi^{-1}(B)$ et $\pi^{-1}(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha \pi^{-1}(A_\alpha)$, d'où on conclut que τ_N est une topologie. Comme $\pi^{-1}(\pi(u)) = u + N$ et $u + N$ est fermé, l'ensemble $\{\pi(u)\}$ est fermé aussi. La définition implique immédiatement que τ_N est invariante par translations. Pour prouver que τ_N est topologie vectorielle, il suffit donc montrer que l'addition est continue au point $(0, 0)$ et la multiplication est continue en tout point. Nous nous contentons de donner la preuve de la première assertion, car la démonstration de la deuxième est similaire.

Remarquons d'abord π est une application ouverte. En effet, si $V \subset X$ est un ouvert, alors $\pi^{-1}(\pi(V)) = V + N$ l'est aussi, et donc $\pi(V) \in \tau_N$. Soit W un voisinage de zéro dans X/N. Alors il existe un voisinage de zéro $V \subset X$ tel que $V + V \subset \pi^{-1}(W)$. Il s'ensuit que $\pi(V) + \pi(V) \subset W$, et comme π est ouvert, $\pi(V)$ est un voisinage de zéro dans X/N.

La linéarité et continuité de π sont conséquences immédiates de la définition.

(b) Si $W \subset X/N$ est un voisinage de zéro, alors $\pi^{-1}(W)$ contient un ouvert $V \in \mathcal{B}$. Comme π est ouvert, on voit que $\pi(V) \subset W$ est un voisinage de zéro.

(c) Si V est convexe, alors $\pi(V)$ l'est aussi, et on voit que l'image par π d'une base locale convexe de X est une base locale convexe dans X/N. De même, si $V \subset X$ est un voisinage borné de zéro, alors $\pi(V)$ est un voisinage borné.

Montrons maintenant que si X est métrisable, avec une métrique invariante par translations, alors X/N possède les mêmes propriétés. En effet, soit d une métrique invariante qui engendre la topologie de X. On définit

$$d_N(a, b) = \inf_{\pi(u)=a, \pi(v)=b} d(u, v). \tag{4.6}$$

[3] C'est-à-dire, l'image d'un ouvert est ouverte.

Il est facile à voir que c'est une métrique invariante sur X/N. De plus,

$$\pi\big(B(0,r)\big) = \{a \in X/N : d_N(a,0) < r\},$$

d'où on voit que les boules de centre zéro forment une base locale de la topologie τ_N. Il s'ensuit que d_N engendre τ_N.

Enfin, si $\|\cdot\|$ est une norme sur X compatible avec τ, alors la fonction

$$\|a\|_N = \inf_{u \in \pi^{-1}(a)} \|u\| \tag{4.7}$$

définit une norme sur X/N qui engendre la topologie τ_N.

(d) Comme (4.6) et (4.7) donnent des formules explicites pour la métrique et la norme dans X/N associées à celles de l'espace X, pour établir (d), il suffit de montrer que si X est complet, alors X/N l'est aussi.

Soit $(a_n) \subset X/N$ une suite de Cauchy. Alors il existe une suite extraite (a_{n_k}) telle que $d_N(a_{n_k}, a_{n_{k+1}}) < 2^{-k}$. On choisit $u_k \in X$ tels que $\pi(u_k) = a_{n_k}$ et $d(u_k, u_{k+1}) < 2^{-k}$. Comme (X,d) est complet, la suite (u_k) converge vers une limite u, et la continuité de π implique que $a_{n_k} \to \pi(u)$. Comme (a_n) est de Cauchy, il s'ensuit que toute la suit (a_n) converge vers $\pi(u)$. $\square$

Exercice 4.31. Soit X un EVT, N un sous-espace fermé et F un sous-espace de dimension finie. Alors $N + F$ est fermé.

Exercice 4.32. Soit X un EVT, p une semi-norme sur X et

$$N = \{u \in X : p(u) = 0\}.$$

Montrer que N est un sous-espace et que la fonction $\tilde{p}(\pi(u)) = p(u)$ définit une norme sur l'espace quotient X/N.

4.8 Exemples

Espace $C(D)$. Nous avons établit dans l'exemple 4.8 que $C(D)$ est un espace de Fréchet avec une métrique définie par (4.2). Montrons maintenant que cet espace ne possède pas la propriété de Heine–Borel, n'est pas localement borné et n'est pas normable.

En effet, un sous-ensemble $A \subset C(D)$ est borné si et seulement si pour tout $n \geq 1$ il existe $R_n > 0$ tel que $p_n(f) \leq R_n$ pour tout $f \in A$. Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction non constante 1-périodique par rapport à tous ses arguments, alors la suite $f(nx)$ est bornée, mais ne contient pas de suite extraite convergente. On conclut donc que $C(D)$ n'a pas la prorpiété de Heine–Borel. Si on montre que l'espace $C(D)$ n'est pas localement borné, alors on peut conclure, d'après le théorème 4.28, qu'il n'est pas normable. Les ensembles $U(n) = \{p_n(f) < 1/n\}$ forment une base de la topologie, et si V est un voisinage borné, alors il existe $n \geq 1$ tel que $U(n) \subset V$. Il est facile à voir que $U(n) \not\subset kU(n+1)$ quelque soit $k \geq 1$. Il s'ensuit que $U(n)$ n'est pas borné.

Espace $C^\infty(D)$. D'après l'exemple 4.8, cet un espace de Fréchet. Comme les ouvert V_N forment une base locale, un sous-ensemble $\mathcal{A} \subset C^\infty(D)$ est borné si et seulement si il existe une suite $\{C_N\} \subset \mathbb{R}_+$ telle que

$$p_N(f) = \max_{|\alpha|\le N} \max_{x\in K_N} |\partial^\alpha f(x)| \le C_N \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{A}. \tag{4.8}$$

Il s'ensuit que si $\mathcal{A}$ est borné, alors toutes les dérivées des fonctions de $\mathcal{A}$ sont uniformément bornées et équicontinues sur tout compact $K \subset D$. Le théorème de Arzelà–Ascoli (voir § 3.4) implique que l'adhérence de $\mathcal{A}$ est compact. D'après le corollaire 4.18, l'espace $C^\infty(D)$ ne peut pas être localement borné, car dans le cas contraire il serait de dimension finie. Le théorème 4.28 implique que $C^\infty(D)$ n'est pas normable.

Espace $L^p(I)$ avec $0 < p < 1$ et $I = (0, 1)$. D'après l'exemple 4.8, $L^p(I)$ est un F-espace. Comme les boules $B_p(r) = \{f \in L^p(I) : d_p(f) < r\}$ forment une base locale de la topologie et $B_p(1) = r^{-1/p}B_p(r)$ pour tout $r > 0$, la boule $B_p(1)$ est bornée. On conclut que $L^p(I)$ est localement borné.

Montrons que l'espace $L^p(I)$ n'a pas d'ouvert convexe différent de $L^p(I)$. (En particulier, $L^p(I)$ n'est pas localement convexe.) Soit $V \neq \varnothing$ un voisinage de zéro convexe. Alors il existe $r > 0$ tel que $B_p(r) \subset V$. Soit $f \in L^p(I)$. Alors il existe un entier $n \ge 1$ tel que $n^{p-1}d_p(f) < r$. On choisit des points $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$ tels que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)|^p \mathrm{d}x = n^{-1}d_p(f), \quad 1 \le i \le n. \tag{4.9}$$

Alors les fonctions g_i définies par

$$g_i(x) = \begin{cases} nf(x) & \text{pour } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

appartient à la boule B_r et donc à l'ouvert V. Comme V est convexe, la fonction $f = \frac{1}{n}(g_1 + \cdots + g_n)$ appartient à V. On conclut que $V = L^p(I)$.

L'absence d'ouverts convexes implique qu'il n'y a pas de fonctions linéaires continues non nulles sur $L^p(I)$ à valeurs dans un espace Y localement convexe. En effet, soit $K : X \to Y$ une telle fonction, $\mathcal{B}$ une base locale de Y et $W \in \mathcal{B}$. Alors $K^{-1}(W)$ est un ouvert convexe non vide et donc $K^{-1}(W) = L^p(I)$. Il s'ensuit que $K\big(L^p(I)\big) \subset W$ pour tout $W \in \mathcal{B}$, d'où on conclut que $Kf = 0$ pour tout $f \in L^p(I)$.