1 Mesure et intégrale

1.1 Tribu borélienne et fonctions mesurables

Soit $X = [a, b]$ un intervalle (le cas où $b = \infty$ ou $a = -\infty$ n'est pas exclu) et $\mathcal{F}$ une famille de sous-ensembles de X. On dit que $\mathcal{F}$ est une *tribu* sur X si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{F}$;

(ii) si $A_i \in \mathcal{F}$ pour $i = 1, 2, \dots$, alors $\cup_i A_i \in \mathcal{F}$;

(iii) si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$, où A^c désigne le complémentaire de A dans X.

La tribu *borélienne* $\mathcal{B} = \mathcal{B}_X$ est définie comme la tribu minimale sur X telle que :

(iv) pour tous $\tilde{a} < \tilde{b}$, on a $]\tilde{a}, \tilde{b}[\cap X \in \mathcal{B}$.

Proposition 1.1. *La tribu borélienne est bien définie. De plus, pour tous $\tilde{a} \le \tilde{b}$ vérifiant les inégalités $\tilde{a} \ge a$ et $\tilde{b} \le b$ on a $[\tilde{a}, \tilde{b}], [\tilde{a}, \tilde{b}[,]\tilde{a}, \tilde{b}] \in \mathcal{B}$.*

Démonstration. Soit $\{\mathcal{F}_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$ la famille de toutes les tribus vérifiant (iv). Alors l'intersection $\cap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$ est la tribu borélienne. Montrons que $\mathcal{B}$ contient tous les intervalles. En effet, considérons, par exemple, le cas d'un intervalle fermé $[\tilde{a}, \tilde{b}]$. Les propriétés (ii) et (iii) impliquent que si $A_i \in \mathcal{B}$, alors $\cap_i A_i \in \mathcal{B}$. D'autre part, on a

$$[\tilde{a}, \tilde{b}] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big]\tilde{a} - \tfrac{1}{n}, \tilde{b} + \tfrac{1}{n}\big[\cap X.$$

Comme les ensembles $\big]\tilde{a} - \frac{1}{n}, \tilde{b} + \frac{1}{n}\big[\cap X$ appartiennent à $\mathcal{B}$, on conclut que $[\tilde{a}, \tilde{b}] \in \mathcal{B}$. □

Proposition 1.2. *Soit $-\infty \le a \le \tilde{a} \le \tilde{b} \le b \le +\infty$ et $\Gamma \in \mathcal{B}_{[a,b]}$. Alors $\Gamma \cap [\tilde{a}, \tilde{b}]$ appartient à $\mathcal{B}_{[\tilde{a},\tilde{b}]}$. Réciproquement, si $\Gamma \in \mathcal{B}_{[\tilde{a},\tilde{b}]}$, alors Γ est borélien en tant que sous-ensemble de $[a, b]$.*

Démonstration. Soit

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \{\Gamma \in \mathcal{B}_{[a,b]} : \Gamma \cap [\tilde{a}, \tilde{b}] \in \mathcal{B}_{[\tilde{a},\tilde{b}]}\}.$$

Alors $\widetilde{\mathcal{B}}$ est une tribu vérifiant (iv) avec $X = [a, b]$. Donc $\widetilde{\mathcal{B}} \supset \mathcal{B}_{[a,b]}$, et on voit que $\Gamma \cap [\tilde{a}, \tilde{b}] \in \mathcal{B}_{[\tilde{a},\tilde{b}]}$ pour tout $\Gamma \in \mathcal{B}_{[a,b]}$. La démonstration de la deuxième partie est similaire. □

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *mesurable* si

$$\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{B} \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exemples 1.3. 1) Soit $A \in \mathcal{B}$. Alors la fonction caractéristique I_A est mesurable.

2) Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est mesurable. Cette propriété est conséquence de la proposition 1.4.

Proposition 1.4. *Soient f, g deux fonctions mesurables. Alors $f \vee g$, $f \wedge g$, $f+g$, fg, f/g sont des fonctions mesurables. De plus, si $\{f_n\}$ est une suite de fonctions mesurables, alors les fonctions $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$, $\liminf_n f_n$ sont aussi mesurables. Enfin, si $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in X$, alors f est mesurable.*

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \{f \vee g < \alpha\} &= \{f < \alpha\} \cap \{g < \alpha\}, \\ \{f \wedge g < \alpha\} &= \{f < \alpha\} \cup \{g < \alpha\}, \\ \{f + g < \alpha\} &= \bigcup_{r_1 + r_2 < \alpha} \{f < r_1\} \cap \{g < r_2\}, \end{aligned}$$

où r_1 et r_2 sont des nombres rationnels. Ces relations impliquent que $f \vee g$, $f \wedge g$, $f + g$ sont des fonctions mesurables. La preuve de mesurabilité de fg est un exercice.

Montrons maintenant que si $g \neq 0$, alors f/g est mesurable. Il suffit de montrer que $1/g$ est mesurable. Supposons par exemple que $\alpha > 0$. Alors

$$\begin{aligned} \{1/g < \alpha\} &= \{1/g < \alpha, g > 0\} \cup \{1/g < \alpha, g < 0\} \\ &= \{g > 1/\alpha, g > 0\} \cup \{g < 1/\alpha, g < 0\}, \end{aligned}$$

d'où on conclut que $1/g$ est mesurable.

Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables. Alors

$$\begin{aligned} \{\sup_n f_n < \alpha\} &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n < \alpha - \tfrac{1}{m}\}, \\ \{\limsup_n f_n < \alpha\} &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{f_n < \alpha - \tfrac{1}{m}\}, \end{aligned}$$

donc $\sup_n f_n$ et $\limsup_n f_n$ sont mesurables. Comme $\inf_n f_n = -\sup_n(-f_n)$ et $\liminf_n f_n = -\limsup_n(-f_n)$, on conclut que ces fonctions sont aussi mesurables. Enfin, si $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in X$, alors $f = \limsup_n f_n$, et donc f est aussi mesurable. □

Proposition 1.5. *Si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, alors*

$$f^{-1}(\Gamma) = \{x \in X : f(x) \in \Gamma\} \in \mathcal{B}_X \quad \textit{pour tout } \Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

De plus, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions mesurables, alors la fonction composée $f \circ g$ est aussi mesurable.

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = \{\Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : f^{-1}(\Gamma) \in \mathcal{B}_X\}$. Alors $\mathcal{F}$ est une tribu contenant les intervalles de la forme $]-\infty, \alpha[$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que $\mathcal{F}$ contient tous les intervalles de $\mathbb{R}$, et donc $\mathcal{F}$ doit contenir la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

Montrons que la fonction composée $f \circ g$ est mesurable. Soit $\Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Alors $(f \circ g)^{-1}(\Gamma) = g^{-1}(\Gamma_1)$, où $\Gamma_1 = f^{-1}(\Gamma)$. D'après la première propriété de la proposition, on a $\Gamma_1 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, d'où on conclut que $\Gamma \in \mathcal{B}_X$. □

Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable est dite *étagée* si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k I_{\Gamma_k}(x), \quad \Gamma_k \cap \Gamma_n = \varnothing, \quad \bigcup_{k=1}^{N} \Gamma_k = X.$$

Théorème 1.6. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors il existe une suite de fonctions étagées $f_n : X \to \mathbb{R}$ telles que*

$$f_n(x) \to f(x) \quad \textit{pour tout } x \in X \textit{ quand } n \to \infty. \tag{1.1}$$

De plus, si $f \geq 0$, alors on peut construire une suite croissante vérifiant (1.1). *Enfin, si f est bornée, alors il existe une suite croissante $\{f_n\}$ telle que la convergence* (1.1) *soit uniforme.*

Démonstration. Comme tout fonction f est représentable comme la somme de deux fonctions positives, sans perte de généralité on peut supposer que $f \geq 0$. On va donc montrer qu'il existe une suite croissante $\{f_n\}$ qui converge vers f. Pour tout entier $n \geq 1$, considérons la subdivision de l'intervalle $[0, n]$ définie par les points $y_k^n = \frac{k}{2^n n}$, $k = 0, \dots, 2^n n$. On définit les fonctions

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n n} y_{k-1}^n I_{\Gamma_k^n}(x),$$

où $\Gamma_k^n = \{y_{k-1}^n \leq f(x) < y_k^n\}$ pour $1 \leq k < 2^n n$ et $\Gamma_{2^n n}^n = \{f(x) \geq y_{2^n n-1}^n\}$. Alors $\{f_n\}$ est croissante et converge vers f. De plus, si f est bornée, alors la convergence est uniforme. □

1.2 Mesure

Soit $X = [a, b]$ et $\mathcal{B}$ la tribu borélienne. Une *mesure* sur $(X, \mathcal{B})$ est une fonction $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $\mu(\varnothing) = 0$;
- Pour toute suite d'ensembles $\{A_n\} \subset \mathcal{B}$ deux à deux disjoints on a

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

On appelle $\mu(X)$ la *masse totale* de μ. Si $\mu(X) < \infty$, alors on dit que X est une mesure *finie*.

Proposition 1.7. *Soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{B}_X)$. Alors les propriétés suivantes ont lieu.*

(a) *Si $A, B \in \mathcal{B}$ et $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

(b) *Soit $\{A_n\} \subset \mathcal{B}$ une suite telle que $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$. Alors*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{1.2}$$

De même, si $\{A_n\} \subset \mathcal{B}$ est une suite décroissante telle que $\mu(A_1) < \infty$, alors

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{1.3}$$

Démonstration. **(a)** Soit $C = B \setminus A$. Alors $B = A \cup C$ et $A \cap C = \varnothing$, et donc

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(C) \geq \mu(A).$$

(b) On note

$$\tilde{A}_1 = A_1, \quad \tilde{A}_2 = A_2 \setminus A_1, \quad \ldots, \tilde{A}_n = A_n \setminus A_{n-1}.$$

Alors

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \tilde{A}_n \cap \tilde{A}_m = \varnothing \quad \text{pour } m \neq n.$$

Donc,

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\tilde{A}_n) = \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty}\big(\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Pour démontrer (1.3), on remarque que

$$A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n),$$

d'où, d'après la formule (1.2), on obtient

$$\mu\Big(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

D'autre part,

$$\mu\Big(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu(A_1) - \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big).$$

Ces deux relations impliquent (1.3). □

Exemples 1.8. 1) *Mesure de Dirac*. Soit $x_0 \in X$. Pour tout $A \in \mathcal{B}$, on définit

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A, \\ 0, & x_0 \notin A. \end{cases}$$

2) *Mesure de comptage* :

$$\mu(A) = \text{nombre d'éléments de } A.$$

3) Soit $\{x_n\} \subset X$ une suite de points deux à deux disjoints et $\{\alpha_n\}$ une suite de nombre positifs. On pose

$$\mu(A) = \sum_{x_n \in A} \alpha_n.$$

Théorème 1.9 (sans démonstration)**.** *Soit $X = [a, b]$ et $\mathcal{B}$ la tribu borélienne. Alors il existe une unique mesure λ sur $(X, \mathcal{B})$ telle que*

$$\lambda([\tilde{a}, \tilde{b}]) = \tilde{b} - \tilde{a} \quad \textit{pour tous } a \leq \tilde{a} \leq \tilde{b} \leq b.$$

Voir chapitre II dans [Far06] ou chapitre V dans [KF75] pour la démonstration de ce résultat. On appelle λ la *mesure de Lebesgue* sur $[a, b]$.

1.3 Intégrale

Soit $X = [a, b]$ un intervalle muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ et μ une mesure sur $(X, \mathcal{B})$. On définit d'abord la notion d'intégrale pour des fonctions positives. Soit f une fonction étagée positive :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k I_{\Gamma_k}(x), \quad \Gamma_k \in \mathcal{B}, \quad \Gamma_k \cap \Gamma_n = \varnothing.$$

On pose

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{N} c_k \mu(\Gamma_k).$$

Proposition 1.10. *Soit f une fonction de la forme*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I_{A_i}(x), \quad \alpha_i \geq 0, \quad A_i \in \mathcal{B}.$$

Alors f est une fonction étagée positive et

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

Démonstration. Il existe des ensembles $\Gamma_k \in \mathcal{B}$, $k = 1, \ldots, N$, deux à deux disjoints tels que

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} \Gamma_{k_j^i}.$$

Cette relation implique que

$$I_{A_i} = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k^i I_{\Gamma_k}, \quad \varepsilon_k^i = 0 \text{ ou } 1.$$

Il s'ensuit que

$$\mu(A_i) = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k^i \mu(\Gamma_k),$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \biggl(\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k^i I_{\Gamma_k} \biggr) = \sum_{k=1}^{N} \biggl(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_k^i \biggr) I_{\Gamma_k}.$$

En utilisant la définition de l'intégrale, on obtient

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{N} \biggl(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_k^i \biggr) \mu(\Gamma_k) = \sum_{i=1}^{n} \biggl(\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k^i \mu(\Gamma_k) \biggr) \alpha_i.$$

□

Soit maintenant $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. D'après le théorème 1.6, il existe une suite de fonctions étagées $f_n : X \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x), \quad f_n(x) \to f(x) \quad \text{pour tout } x \in X. \tag{1.4}$$

Il est facile à voir que $\int_X f_n d\mu$ est une suite croissante. On définit l'intégrale (de Lebesgue) de f par la formule

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Théorème 1.11. *La valeur de l'intégrale de f ne dépend pas de la suite $\{f_n\}$. De plus,*

$$\int_X f d\mu = \sup \biggl\{ \int_X g d\mu \,;\, g \ge 0 \text{ est une fonction étagée telle que } g \le f \biggr\}. \tag{1.5}$$

Démonstration. On note $I(f)$ le membre de droite de (1.5). Il est clair que pour toute suite $\{f_n\}$ vérifiant (1.4) la limite des intégrales est majorée par $I(f)$. Montrons l'inégalité réciproque.

Soit $\varepsilon > 0$ et $g \ge 0$ une fonction étagée telle que

$$I(f) \le \int_X g d\mu + \varepsilon.$$

Soit $c \in]0,1[$ et $E_n = \{x \in X : f_n(x) \ge c g(x)\}$. Alors $E_n \subset E_{n+1}$ et $\cup_n E_n = X$. Il s'ensuit que

$$\int_X f_n d\mu \ge \int_X f_n I_{E_n} d\mu \ge c \int_X g I_{E_n} d\mu \to c \int_X g d\mu \ge c I(f) - c\varepsilon,$$

d'où on conclut que

$$\int_X f d\mu \geq cI(f) - c\varepsilon.$$

Comme $c \in]0,1[$ et $\varepsilon > 0$ étaient quelconques, on arrive à la relation (1.5). $\square$

Une fonction positive f est dite *intégrable* si $\int_X f d\mu < \infty$. La proposition suivante établit quelques propriétés de l'intégrale.

Proposition 1.12. **(a)** *Si* $0 \leq f \leq g$, *alors*

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

(b) *Si* $f, g \geq 0$ *et* $c \geq 0$, *alors*

$$\int_X cf d\mu = c \int_X f d\mu,$$

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Démonstration. **(a)** On note $\mathcal{E}$ la famille de fonctions étagées et $\mathcal{E}_+$ la famille de fonctions $h \in \mathcal{E}$ positives. Comme $f \leq g$, on a

$$\{h \in \mathcal{E}_+, h \leq f\} \subset \{h \in \mathcal{E}_+, h \leq g\},$$

d'où on conclut que

$$\sup\left\{\int_X h d\mu, h \in \mathcal{E}_+, h \leq f\right\} \leq \sup\left\{\int_X h d\mu, h \in \mathcal{E}_+, h \leq g\right\}.$$

(b) Soit $f_n \in \mathcal{E}_+$ une suite croissante qui converge vers f. Alors $\{cf_n\}$ est aussi croissante et converge vers cf. Donc,

$$\int_X cf d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X cf_n d\mu = c \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = c \int_X f d\mu.$$

La démonstration de la deuxième relation est similaire. $\square$

On définit maintenant l'intégrale d'une fonction quelconque. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que f est *intégrable* si $\int_X |f| d\mu < \infty$. Dans ce cas, on pose

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu,$$

où $f^+ = f \vee 0$ et $f^- = (-f) \vee 0$.

Proposition 1.13. *L'intégrale possède les propriétés suivantes.*
(a) *Si* $f = f_1 - f_2$ *est intégrable et* $f_i \geq 0$, *alors*

$$\int_X f d\mu = \int_X f_1 d\mu - \int_X f_2 d\mu.$$

(b) *Si* f, g *sont des fonctions intégrables et* $c \in \mathbb{R}$*, alors*

$$\int_X (cf + g)d\mu = c \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

(c) *Si* f *est intégrable, alors*

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

Démonstration. Nous n'allons montrer que la propriété (a), car les deux autres propriétés sont des conséquences simples de (a) et de la définition de l'intégrale. Etant données deux fonctions $f_i \geq 0$, on peut écrire

$$f_1 = f + g_1, \quad f_2 = f + g_2, \quad f = f_1 \wedge f_2.$$

Alors $g_1 \geq 0$, $g_2 \geq 0$ et $g_1 \wedge g_2 \equiv 0$. Il s'ensuit que

$$g_1 = (f_1 - f_2)^+, \quad g_2 = (f_1 - f_2)^-.$$

En utilisant la définition de l'intégrale, on obtient

$$\int_X f d\mu = \int_X g_1 d\mu + \int_X g_2 d\mu.$$

D'autre part, d'après la proposition 1.12, on a

$$\int_X f_i d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g_i d\mu, \quad i = 1, 2.$$

Ces deux relations impliquent le résultat cherché. □

Signalons que tous les résultats obtenus ci-dessus restent vrais dans le cas de fonctions à valeurs complexes.

1.4 Intégrales de Riemann et de Lebesgue

Théorème 1.14. *Soit* $X = [a, b]$ *avec* $a > -\infty$ *et* $b < \infty$*. On munit* X *de la mesure de Lebesgue. Alors pour toute fonction bornée intégrable à la fois au sens de Riemann et de Lebesgue les valeurs des deux intégrales sont confondues.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $0 \leq f \leq 1$. Considérons une partition $\Delta = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b\}$ de l'intervalle $[a, b]$ et les somme de Darboux correspondantes :

$$I^+(f, \Delta) = \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f, \quad I^-(f, \Delta) = \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f.$$

Comme f est intégrable au sens de Riemann, pour toute $\varepsilon > 0$ il existe une partition Δ_ε telle que

$$I^+(f, \Delta_\varepsilon) - I^-(f, \Delta_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{1.6}$$

On introduit des fonctions étagées f_ε^+ et f_ε^- par

$$\begin{aligned} f_\varepsilon^+(x) &= \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \quad \text{pour } x \in [x_{k-1}, x_k[, \\ f_\varepsilon^-(x) &= \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \quad \text{pour } x \in [x_{k-1}, x_k[. \end{aligned}$$

Alors $f_\varepsilon^- \leq f \leq f_\varepsilon^+$,

$$\int_X f_\varepsilon^- d\lambda = I^-(f, \Delta_\varepsilon) \leq \int_a^b f dx \leq I^+(f, \Delta_\varepsilon) = \int_X f_\varepsilon^- d\lambda. \tag{1.7}$$

Les relations (1.6), (1.7) impliquent que les valeurs des intégrales de Lebesgue et de Riemann sont égales. □

Exemple 1.15. Considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas intégrable au sens de Riemann, mais son intégrale de Lebesgue vaut zéro.