2 Théorèmes fondamentaux

2.1 Théorème de convergence monotone

Théorème 2.1 (Beppo-Levi). *Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions intégrables telles que*

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \text{ pour tout } x \in X, \quad \int_X f_n d\mu \leq C \text{ pour tout } n \geq 1,$$

où C est une constante. On pose

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{2.1}$$

Alors f est intégrable et

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu. \tag{2.2}$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f_n \geq 0$. Soit

$$N > 0, \quad A_{n,N} = \{x \in X : f_n(x) \geq N\}, \quad A_N = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,N}.$$

Il est clair que $f(x) = \infty$ si est seulement si $x \in \cap_N A_N$. On a

$$C \geq \int_X f_n d\mu \geq \int_X f_n I_{A_{n,N}} d\mu \geq N \int_X I_{A_{n,N}} d\mu = N\mu(A_{n,N}),$$

d'où on voit que

$$\mu(A_N) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_{n,N}) \leq \frac{C}{N}.$$

Il s'ensuit que $\mu\big(\cap_N A_N\big) = 0$, donc $\{f = \infty\}$ est un ensemble de mesure zéro.

On fixe maintenant $c \in]0,1[$ et on note $E_n = \{x \in X : f_n(x) \geq cf(x)\}$. Alors $E_n \subset E_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$ et $\mu\big(X \setminus \cup_n E_n\big) = 0$. On a

$$C \geq \int_X f_n d\mu \geq \int_X f_n I_{E_n} d\mu \geq c \int_X f I_{E_n} d\mu.$$

Lemme 2.2. *Soit $f \geq 0$ une fonction intégrable et $\{E_n\}$ une suite d'ensembles mesurables telle que*

$$E_n \subset E_{n+1}, \quad \mu\big(X \setminus \cup_n E_n\big) = 0, \quad \int_X f I_{E_n} d\mu \leq C. \tag{2.3}$$

Alors f est intégrable et

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f I_{E_n} d\mu. \tag{2.4}$$

Le lemme 2.2 implique que

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu \geq c\int_x f d\mu \quad \text{pour tout } c\in]0,1[.$$

Cette inégalité entraîne la relation (2.2). □

Démonstration du lemme. Montrons d'abord que f est intégrable. Supposons qu'il existe une fonction étagée $g=\sum_k c_k I_{\Gamma_k}\leq f$ telle que $\int_X g d\mu > C$. Alors

$$\int_X gI_{E_n} d\mu = \sum_k c_k\mu(\Gamma_k\cap E_n)\to \sum_k c_k\mu(\Gamma_k) = \int_X g d\mu > C,$$

d'où on conclut que

$$\int_X fI_{E_n} d\mu \geq \int_X gI_{E_n} d\mu > C \quad \text{pour } n\gg 1.$$

Nous avons montré que $\int_X f d\mu \leq C$. Un argument similaire permet d'établir la relation (2.4). □

Exemple 2.3. Soit $X=[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue, $f_n(x)=\min\{x^{-1},n\}$, $f_n(0)=0$. Alors

$$f_n(x)\to\frac{1}{x}, \qquad \int_X f_n d\lambda \to +\infty \quad \text{quand } n\to\infty.$$

2.2 Théorème de convergence dominée

Théorème 2.4 (Lebesgue)**.** *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonction mesurables telle que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x), \quad |f_n(x)|\leq g(x) \quad \textit{pour tout } x\in X,$$

où g est une fonction intégrable. Alors f est intégrable et

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Démonstration. Soit $g_n(x)=\inf\{f_k(x), k\geq n\}$. Alors $g_n\leq g_{n+1}$, $g_n\leq f_n$, $g_n\to f$. En utilisant le théorème de convergence monotone, on obtient

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu. \tag{2.5}$$

D'autre part, soit $h_n(x)=\inf\{-f_k(x), k\geq n\}$. Alors $h_n\leq h_{n+1}$, $h_n\leq -f_n$, $h_n\to -f$. D'après le théorème de convergence monotone,

$$\int_X (-f)\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X h_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int (-f_n)\, d\mu,$$

d'où on conclut que

$$\int_X f d\mu \geq \limsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu. \tag{2.6}$$

Les inégalités (2.5), (2.6) impliquent le résultat cherché. □

2.3 Lemme de Fatou

Théorème 2.5. *Soit* $f_n \geq 0$ *une suite. Alors*

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu. \tag{2.7}$$

Démonstration. On peut supposer que le membre de droite dans (2.7) est fini. Soit $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$. Alors $g_n \leq g_{n+1}$, $g_n \leq f_n$,

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \liminf_{n\to\infty} f_n, \quad \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

D'après le théorème de convergence monotone, on a

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} g_n \right) d\mu = \int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

□

Exemple 2.6. Soit $X = [0, \infty[$, $f_n(x) = ne^{-nx}$. Alors $\liminf_n f_n(x) = 0$ pour $x > 0$,

$$\int_X f_n d\lambda = \int_0^\infty ne^{-nx} dx = 1 \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Donc, l'inégalité dans (2.7) peut être stricte.

2.4 Généralisations

Soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{B}_X)$. Un ensemble $N \subset X$ est dit *négligeable* si $N \in \mathcal{B}_X$ et $\mu(N) = 0$. Soit (P) une propriété qui dépend des points de X. On dit que (P) a lieu *presque partout* s'il existe un ensemble négligeable N tel que (P) est vraie en tout point de $X \setminus N$. Etant donné un ensemble $E \in \mathcal{B}$, on dit que (P) a lieu *presque partout dans* E s'il existe un ensemble négligeable $N \subset X$ tel que (P) est vraie en tout point de $E \setminus N$.

Exemple 2.7. 1) Deux fonctions mesurables égales presque partout.

2) Une suite de fonctions mesurables qui converge presque partout.

Les théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée restent vrais dans le cas où la suite converge presque partout. Ce fait est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 2.8. *Soient* f, g *deux fonctions mesurables égales presque partout. Dans ce cas, si* f *est intégrable, alors* g *l'est aussi, et on a*

$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu.$$

Signalons aussi que la théorie construite ci-dessus reste vraie dans le cas de fonctions à valeurs complexes.

2.5 Fonctions définies par des intégrales

Soit $X = [a, b]$, μ une mesure sur $(X, \mathcal{B}_X)$ et $\Lambda \subset \mathbb{R}$ (ou $\Lambda \subset \mathbb{C}$) un ouvert. On considère une fonction $f : X \times \Lambda \to \mathbb{R}$ telle que $f(\cdot, \lambda)$ soit intégrable pour tout $\lambda \in \Lambda$. Posons

$$F(\lambda) = \int_X f(x, \lambda) d\mu.$$

Les deux résultats suivants donnent des conditions suffisantes pour que F soit continue ou dérivable. Leur démonstration est basée sur le théorème de convergence dominée.

Théorème 2.9. *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites.*

(a) *Pour presque tout $x \in X$, la fonction $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ est continue sur Λ.*

(b) *Pour tout compact $K \subset \Lambda$, il existe une fonction intégrable $g_K(x)$ telle que*

$$|f(x, \lambda)| \leq g_K(x) \quad \text{pour } \lambda \in K \text{ et presque tout } x \in X.$$

Alors F est continue sur Λ.

Théorème 2.10. *Supposons que $\Lambda \subset \mathbb{R}$ et les conditions suivantes sont satisfaites.*

(a) *Pour presque tout $x \in X$, la fonction $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ est dérivable sur Λ.*

(b) *Pour tout compact $K \subset \Lambda$, il existe une fonction intégrable $g_K(x)$ telle que, pour tout $x \in X$ pour lequel $f(x, \lambda)$ est dérivable et pour tout $\lambda \in K$,*

$$\left| \frac{f(x, \lambda)}{\partial \lambda} \right| \leq g_K(x).$$

Alors F est dérivable sur Λ, et sa dérivée est donnée par

$$F'(\lambda) = \int_X \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} d\mu. \tag{2.8}$$

Démonstration du théorème 2.9. Soit $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ une suite que converge vers λ. On veux montrer que $F(\lambda_n) \to F(\lambda)$.

On pose $g_n(x) = f(x, \lambda_n)$ et $g(x) = f(x, \lambda)$. Alors

$$g_n \to g, \quad |g_n(x)| \leq g_K(x) \quad \text{presque partout,}$$

où $K = \{\lambda_n, \lambda\}$. D'après le théorème sur la convergence dominée,

$$F(\lambda_n) = \int_X g_n d\mu \to \int_X g d\mu = F(\lambda).$$

□

Démonstration du théorème 2.10. Pour $\nu > 0$, on pose

$$g(\nu) = \frac{F(\lambda + \nu) - F(\lambda)}{\nu} = \int_X \frac{f(x, \lambda + \nu) - f(x, \lambda)}{\nu} d\mu.$$

Il suffit de montrer que $g(\nu_n)$ converge vers le membre de droite dans (2.8) pour toute suite $\{\nu_n\}$ convergeant vers zéro.

Soit $B_\delta = \{\nu \in \mathbb{R} : |\nu| \le \delta\}$, où $\delta > 0$ est suffisamment petit. Alors, d'après le théorème des accroissements finis, pour $\nu \in B_\delta$ et presque tout $x \in X$, on a

$$\Big|\frac{f(x,\lambda+\nu) - f(x,\lambda)}{\nu}\Big| \le g_K(x),$$

où $K = \lambda + B_\delta$. En utilisant le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée, on conclut que $\{g(\nu_n)\}$ converge vers le membre de droite de la relation (2.8). $\square$

Exemple 2.11. 1) *Fonction Gamma*. Soit

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\lambda-1} dx, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

On pose $f(x,\lambda) = e^{-x}x^{\lambda-1}$. Alors f est continue,

$$|f(x,\lambda)| \le e^{-x} x^{\operatorname{Re}\lambda - 1} \le e^{-x} x^{\sigma-1} =: g_\sigma(x), \quad x > 0, \quad \operatorname{Re}\lambda \ge \sigma.$$

Pour tout $\sigma > 0$, la fonction g_σ est intégrable, donc le théorème 2.9 implique que $\Gamma(\lambda)$ est continue pour $\operatorname{Re}\lambda > 0$. De plus,

$$\Big|\frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial\lambda}\Big| \le e^{-x} |\ln x|\, x^{\operatorname{Re}\lambda-1} \le e^{-x} |\ln x|\, x^{\sigma-1} := \tilde{g}_\sigma(x), \quad x > 0, \quad \operatorname{Re}\lambda \ge \sigma.$$

Comme $\tilde{g}_\sigma$ est intégrable, on peut appliquer le théorème 2.10 et conclure que Γ est dérivable, et son dérivée est donnée par

$$\Gamma'(\lambda) = \int_0^\infty e^{-x} (\ln x)\, x^{\lambda-1} dx.$$

Le même argument montre que $\Gamma \in C^\infty$ et

$$\Gamma^{(k)}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-x} (\ln x)^k x^{\lambda-1} dx.$$

2) Soit F la fonction définie par

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda x)}{x(x^2+1)}\, dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F'(\lambda) &= \int_0^\infty \frac{\cos(\lambda x)}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{i\lambda x} + e^{-i\lambda x}}{x^2+1}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{i\lambda x}}{x^2+1}\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{-\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\lambda x}}{x^2+1}\, dx. \end{aligned}$$

En utilisant des méthodes d'analyse complexe, on peut montrer que

$$F'(\lambda) = \frac{\pi}{2} e^{-|\lambda|}.$$

De plus, $F(0) = 0$. Donc,

$$F(\lambda) = \operatorname{sgn}(\lambda)\frac{\pi}{2}\big(1 - e^{-|\lambda|}\big).$$