3 Espaces L^p

3.1 Définition et exemples

Soit $X = [a, b]$ muni de la tribu borélienne et d'une mesure sur $(X, \mathcal{B}_X)$. Pour $1 \leq p < \infty$, on note $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{R}$ telles que

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty.$$

Il est clair que $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ est un espace vectoriel. Pour obtenir un résultat similaire dans le cas $p > 1$, on aura besoin du théorème suivant.

Théorème 3.1. *Soient $p, q \in]1, \infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors pour toutes fonctions mesurables $f, g : X \to \mathbb{R}$ on a*

$$\left| \int_X fg d\mu \right| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \quad (\textit{Hölder}), \tag{3.1}$$

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (\textit{Minkowski}). \tag{3.2}$$

Démonstration. On démontre d'abord l'inégalité de Hölder. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Pour tous $x, y \geq 0$ on a

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Il s'ensuit que

$$\left| \int_X fg d\mu \right| \leq \int_X |fg| d\mu \leq \int_X \left(\frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} \right) d\mu = \frac{\|f\|_p^p}{p} + \frac{\|g\|_q^q}{q} = 1.$$

Montrons maintenant l'inégalité de Minkowski. En utilisant (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_X |f + g|^p d\mu \leq \int_X |f + g|^{p-1} \big(|f| + |g|\big) d\mu \\ &\leq \left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{(p-1)/p} \left\{ \Big(\int_X |f|^p dx \Big)^{1/p} + \Big(\int_X |g|^p dx \Big)^{1/p} \right\}. \end{aligned}$$

Cette inégalité implique immédiatement le résultat cherché. □

Corollaire 3.2. *L'ensemble $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ est un espace vectoriel, et la fonction $f \mapsto \|f\|_p$ est une seminorme sur $\mathcal{L}^p(X, \mu)$.*

On définit également l'espace $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{R}$ telles que

$$|f(x)| \leq M \quad \text{pour presque tout } x \in X, \tag{3.3}$$

où $M > 0$ est une constante qui dépend de f. C'est un espace vectoriel, et on note $\|f\|_\infty$ la constante minimale M pour laquelle (3.3) a lieu. Il est facile à voir que la fonction $f \mapsto \|f\|_\infty$ est une seminorme sur $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$.

Sauf certains cas exceptionnels, $\|f\|_p$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p(X,\mu)$: la relation $\|f\|_p = 0$ n'implique pas que $f = 0$. Mais si on identifie les fonctions qui sont égales presque partout, on obtient un espace vectoriel, noté $L^p(X,\mu)$, pour lequel $\|f\|_p$ est une norme.

Exemple 3.3. Considérons le cas où $X = [1,\infty[$ et $\mu = \sum_{k\geq 1}\delta_k$. Alors $L^p(X,\mu)$ est isomorphe à l'espace ℓ^p des suites $\boldsymbol{x} = (x_k)_{k\geq 1}$ telles que

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\ell^p} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} < \infty.$$

De même, $L^\infty(X,\mu)$ est isomorphe à l'espace ℓ^∞ des suites bornées avec la norme $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \sup_k |x_k|$. Ce sont des espaces complets.

3.2 Théorème de Riesz–Fischer

Théorème 3.4. *L'espace $L^p(X,\mu)$ est complet pour tout $p \in [1,+\infty]$.*

Démonstration. Le cas $p = \infty$ est presque évident, donc on va supposer que $p < \infty$. Soit $\{f_n\} \subset L^p(X,\mu)$ une suite de Cauchy. Alors il existe $n_k \to \infty$ tel que

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p \leq 2^{-k} \quad \text{pour tout } k \geq 1.$$

donc la série $\sum_k \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p$ converge. On a besoin maintenant de la proposition suivante.

Proposition 3.5. *Soit $1 \leq p < \infty$ et $\{g_k\} \subset \mathcal{L}^p(X,\mu)$ une suite telle que*

$$M := \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_p < \infty.$$

Alors la série $\sum_k g_k$ converge presque partout, sa somme G est une fonction appartenant à l'espace $\mathcal{L}^p(X,\mu)$, et

$$\lim_{N\to\infty} \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} g_k - G \Big\|_p = 0.$$

D'après ce résultat, il existe une fonction $G \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$ telle que

$$\Big\| \sum_{k=1}^{N} (f_{n_k} - f_{n_{k+1}}) - G \Big\|_p \to 0 \quad \text{quand } k \to \infty.$$

d'où on conclut que

$$\|f_{n_k} - (f_{n_1} - G)\|_p \to 0 \quad \text{quand } k \to \infty.$$

Comme $\{f_n\}$ est une suite de Cauchy, on voit que $f_n \to f_{n_1} - G$ dans $L^p(X,\mu)$. $\square$

Démonstration de la proposition 3.5. Soit

$$F_N(x) = \sum_{k=1}^{N} |g_k(x)|.$$

Alors $\{F_N^p\} \subset \mathcal{L}^1(X, \mu)$ est une suite croissante,

$$\int_X F_N^p d\mu \leq \Big(\sum_{k=1}^{N} \|g_k\|_p\Big)^p \leq M^p.$$

D'après le théorème de convergence monotone, $\{F_N\}$ converge presque partout vers une fonction $F \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$. Il s'ensuit que la série $\sum_k g_k$ converge presque partout vers une fonction mesurable $G(x)$. Soit

$$G_N(x) = \sum_{k=1}^{N} g_k(x).$$

Alors $|G_N| \leq F$, $|G| \leq F$, et en utilisant le théorème de convergence dominée, on conclut que

$$\int_X |G_N - G|^p d\mu \to 0 \quad \text{quand } N \to \infty.$$

□