4 Mesures absolument continues

4.1 Fonctionelles continues sur l'espace L^2

Soit $X = [p, q]$ et μ une mesure sur $(X, \mathcal{B}_X)$. On définit un *produit scalaire* sur $L^2(X, \mu)$ par la formule

$$(f, g) = \int_X fg d\mu, \quad f, g \in L^2(X, \mu).$$

Pour tout $f \in L^2(X, \mu)$, l'application $g \mapsto (f, g)$ est une fonction linéaire continue. Me théorème suivant établit l'assertion réciproque.

Théorème 4.1. *Soit $F : L^2(X, \mu) \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle continue. Alors il existe une unique fonction $f \in L^2(X, \mu)$ telle que*

$$F(g) = (f, g) \quad \textit{pour tout } g \in L^2(X, \mu). \tag{4.1}$$

Démonstration dans le cas de ℓ^2. Si une suite $f = (f_n)_{n \geq 1} \in \ell^2$ vérifiant les conditions du théorème existe, alors elle est unique, et ses éléments sont donnés par $f_n = F(e^{(n)})$, ou $e_m^{(n)} = \delta_m^n$. montrons que la suite définie par ces relations appartient à ℓ^2. En effet, on a

$$F\left(\sum_{n=1}^{k} f_n e^{(n)}\right) = \sum_{n=1}^{k} f_n^2,$$

$$\left|F\left(\sum_{n=1}^{k} f_n e^{(n)}\right)\right| \leq C \left\|\sum_{n=1}^{k} f_n e^{(n)}\right\| = C\left(\sum_{n=1}^{k} f_n^2\right)^{1/2},$$

d'où on voit que

$$\|f\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{k} f_n^2 \leq C^2.$$

En utilisant le lemme de Fatou, on conclut que $f \in \ell^2$. Comme les fonctionnelles continues $g \mapsto F(g)$ et $g \mapsto (f, g)$ sont confondues sur des combinaisons linéaires finies de $e^{(n)}$, elle sont égales. $\square$

4.2 Théorème de Radon–Nikodym

Soit ν une mesure sur $(X, \mathcal{B}_X)$ et $f \in L^1(X, \nu)$. Alors la fonction

$$\mu : \Gamma \mapsto \int_\Gamma f d\nu, \quad \Gamma \in \mathcal{B}_X,$$

définit une mesure telle que $\mu(\Gamma) = 0$ pour tout $\Gamma \in \mathcal{B}_X$ vérifiant $\nu(\Gamma) = 0$. Le théorème suivant établit l'implication réciproque pour des mesures finies.

Théorème 4.2. *Soient μ, ν deux mesure sur $(X, \mathcal{B}_X)$ de masses totales finies. Supposons que $\mu(\Gamma) = 0$ pour tout ensemble $\Gamma \in \mathcal{B}_X$ tel que $\nu(\Gamma) = 0$. Alors il existe une unique fonction $f \in L^1(X, \nu)$ telle que*

$$\mu(\Gamma) = \int_\Gamma f d\nu \quad \textit{pour tout } \Gamma \in \mathcal{B}_X. \tag{4.2}$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on suppose que $\mu(X) = \nu(X) = 1$. Soit $\lambda = \mu + \nu$. Alors la fonction $g \mapsto \int_X g d\mu$ est linéaire et continue sur $L^2(X, \lambda)$. Donc, d'après le théorème 4.1, il existe $\psi \in L^2(X, \lambda)$ tel que

$$\int_X g d\mu = \int_X \psi g d\lambda \quad \text{pour tout } g \in L^2(X, \lambda). \tag{4.3}$$

Montrons que $0 \leq \psi < 1$ ν-presque sûrement (et donc μ-presque sûrement). En effet, la relation (4.3) est équivalente à

$$\int_X g(1 - \psi)\, d\mu = \int_X \psi g d\nu \quad \text{pour tout } g \in L^2(X, \lambda). \tag{4.4}$$

Prenons $g = I_{\{\psi \geq 1\}}$. Alors

$$0 \geq \int_X I_{\{\psi \geq 1\}}(1 - \psi)\, d\mu = \int_X I_{\{\psi \geq 1\}} \psi \, d\nu \geq \nu(\{\psi \geq 1\}),$$

d'où on voit que $\nu(\{\psi \geq 1\}) = 0$, donc $\psi < 1$ ν-presque sûrement. De même, en prenant $g = I_{\{\psi < 0\}}$, on obtient

$$0 \leq \int_X I_{\{\psi < 0\}}(1 - \psi)\, d\mu = \int_X I_{\{\psi < 0\}} \psi \, d\nu \leq 0,$$

d'où on conclut que $\psi \geq 0$ ν-presque sûrement.

On prend maintenant $g = h(1 + \psi + \cdots + \psi^n)$ avec $0 \leq h \leq 1$. Alors (4.4) implique que

$$\int_X h(1 - \psi^{n+1}) d\mu = \int_X h \frac{(1 - \psi^{n+1})\psi}{1 - \psi} \, d\nu.$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$, on obtient

$$\int_X h d\mu = \int_X h \frac{\psi}{1 - \psi} \, d\nu \quad \text{pour tout } h,\ 0 \leq h \leq 1.$$

En particulier, pour $h = I_\Gamma$ on arrive à la relation (4.2) avec $f = \frac{\psi}{1 - \psi}$. □

Si μ, ν sont deux mesures vérifiant les conditions du théorème 4.2, alors on dit que μ *est absolument continue par rapport à* ν, et on écrit $\mu \ll \nu$. Dans ce cas, la fonction f est appelée la *densité* de μ par rapport à ν, et on note $f = \frac{d\mu}{d\nu}$.

Corollaire 4.3. *Soit μ, ν deux mesure de masses totales finies telle que $\mu \ll \nu$. Alors pour toute fonction $g \in L^1(X, \mu)$ on a*

$$\int_X g d\mu = \int_X f g d\nu,$$

où $f = \frac{d\mu}{d\nu}$.