5 Théorème de Fubini

5.1 Théorie de mesure sur un espace métrique

Tous les résultats établis pour un intervalle $[a, b]$ restent vrais pour un espace métrique quelconque. Plus précisément, soit X un ensemble et $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

- $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout $x, y \in X$;
- $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pour tout $x, y, z \in X$.

Dans ce cas, on dit que d est une métrique sur X et on appelle le couple (X, d) un espace métrique. Dans la suite, on suppose que (X, d) est complet, c'est-à-dire, toute suite de Cauchy possède une limite.

Définition 5.1. Un ensemble $G \subset X$ est dit *ouvert* si pour tout $x \in X$ il existe une constante $r > 0$ tel que

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\} \subset G.$$

Un ensemble $F \subset X$ est dit *fermé* si $F^c = X \setminus F$ est ouvert.

Définition 5.2. La *tribu borélienne* $\mathcal{B} = \mathcal{B}_X$ sur X est définie comme la tribu minimale contenant tous les ouverts.

Proposition 5.3. *La tribu borélienne est bien définie et possède les propriétés suivantes.*

(a) *$\mathcal{B}$ contient tous les fermés.*
(b) *$\mathcal{B}$ contient tous les ensembles dénombrables.*
(c) *$\mathcal{B}$ est la tribu minimale contenant tous les fermés.*

Définition 5.4. Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite *mesurable* si $\{f < \alpha\} \in \mathcal{B}_X$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Comme dans le cas d'un intervalle, on peut montrer que f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(\Gamma) \in \mathcal{B}_X$ pour tout $\Gamma \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$. La définition d'une mesure et la construction de l'intégrale de Lebesgue dans le cas d'un espace métrique est tout à fait similaire au cas d'un intervalle. En plus, tous les résultats établis pour l'intervalle restent vrais dans le cas d'un espace métrique. En particulier, on a le théorèmes de Beppo–Levi sur la convergence monotone et de Lebesgue sur la convergence dominée, ainsi que le lemme de Fatou. On peut construire également les espaces $L^p(X, \mu)$ et établir le théorème de Riesz–Fischer sur leur complétude. Enfin, on a aussi le théorème de Radon–Nikodym. Les démonstrations de ces résultats répètent celles pour le cas d'un intervalle.

Un exemple important est le cas où

$$X = X_1 \times X_2 \subset \mathbb{R}^2, \quad X_1 = [a, b], \quad X_2 = [c, d]. \tag{5.1}$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la métrique suivante, équivalente à la distance euclidienne :

$$|x - y| = \max\bigl(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\bigr), \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2).$$

Pour simplifier, on considère dans la suite ce cas particulier.

5.2 Produit de deux mesures

Soit X l'espace défini par (5.1). On note $\mathcal{B}_{X_1} \otimes \mathcal{B}_{X_2}$ la tribu minimale sur X qui contient tous les ensembles de la forme $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ avec $\Gamma_i \in \mathcal{B}_{X_i}$, $i = 1, 2$.

Proposition 5.5. *La tribu borélienne $\mathcal{B}_X$ est confondue avec $\mathcal{B}_{X_1} \otimes \mathcal{B}_{X_2}$.*

Démonstration. Il est claire que $\mathcal{B}_{X_1} \otimes \mathcal{B}_{X_2} \supset \mathcal{B}_X$. Montrons que

$$\mathcal{B}_{X_1} \otimes \mathcal{B}_{X_2} \subset \mathcal{B}_X. \tag{5.2}$$

Nous allons prouver que :

(a) $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \in \mathcal{B}_X$ pour $\Gamma_1 \in \mathcal{B}_{X_1}$, $\Gamma_2 =]\alpha, \beta[\cap X_2$ ou $X_2 \setminus]\alpha, \beta[$;

(b) $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \in \mathcal{B}_X$ pour $\Gamma_1 \in \mathcal{B}_{X_1}$, $\Gamma_2 \in \mathcal{B}_{X_2}$.

Si (a) et (b) sont démontrées, alors l'inclusion (5.1) découle immédiatement. La démonstration de ces deux propriétés sont similaires, et nous on ne montre que (a).

Soit $\mathcal{F}$ la famille des éléments $\Gamma_1 \in \mathcal{B}_{X_1}$ tels que

$$\Gamma_1 \times I, \Gamma_1 \times I^c, \Gamma_1^c \times I, \Gamma_1^c \times I^c \in \mathcal{B}_X$$

pour tout ensemble $I \subset X_2$ de la forme $]\alpha, \beta[\cap X_2$. Alors $\mathcal{F}$ est une tribu qui contient tous les intervalles. Donc, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{X_1}$. □

Proposition 5.6. *Soit $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors les fonctions*

$$f(x_1, \cdot) : X_2 \to \mathbb{R}, \quad f(\cdot, x_2) : X_1 \to \mathbb{R},$$

sont aussi mesurables pour tous $x_1, x_2 \in X$.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas d'une fonction caractéristique. On note

$$\mathcal{B}' = \{\Gamma \in \mathcal{B}_X : I_\Gamma \text{ possède la propriété requise}\}.$$

Alors $\mathcal{B}'$ est une tribu qui contient les ensembles de la forme $\Gamma_1 \times \Gamma_2$. Il s'ensuit que $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_X$. □

Théorème 5.7. *Soient μ_i, $i = 1, 2$, deux mesures de masses totales finies sur X_i. Alors il existe une unique mesure μ sur $X_1 \times X_2$ telle que*

$$\mu(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = \mu_1(\Gamma_1)\mu_2(\Gamma_2) \quad \textit{pour tous } \Gamma_1 \in \mathcal{B}_{X_1},\ \Gamma_2 \in \mathcal{B}_{X_2}.$$

On note $\mu_1 \otimes \mu_2$ la mesure construite dans ce théorème. Un exemple important d'une mesure de ce type est la mesure de Lebesgue multidimensionnelle construite dans le théorème suivant.

Théorème 5.8. *Pour tout entier $d \geq 1$, il existe une unique mesure λ_d sur $\mathbb{R}^d$ telle que*

$$\lambda_d\Big(\prod_{j=1}]a_j, b_j[\Big) = \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j).$$

Pour la démonstration de ces deux théorèmes, voir [Far06] ou [KF75].

Corollaire 5.9. *Pour tout $k \in [\![1, d-1]\!]$, on a $\lambda_d = \lambda_k \otimes \lambda_{k-d}$.*

5.3 Résultat principal

Théorème 5.10. *Soit $X_1 = [a,b]$, $X_2 = [c,d]$ et $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$, où μ_1 et μ_2 sont des mesures sur X_1 et X_2 respectivement. Alors les propriétés suivantes ont lieu.*

(a) *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Alors*

$$\int_X f(x,y)\,(\mu_1 \otimes \mu_2)(dx,dy) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x,y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x)$$
$$= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x,y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y). \tag{5.3}$$

(b) *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable par rapport à $\mu_1 \otimes \mu_2$. Alors* (5.3) *a lieu.*

(c) *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que*

$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f(x,y)| d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) < \infty.$$

Alors (5.3) *a lieu.*

Exemple 5.11. Soit $f(x,y)$ une fonction définie sur $[-1,1]^2$ par la formule

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(x^2+y^2)^{-2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\int_{[-1,1]} f(x,y)\,dx = 0, \quad \int_{[-1,1]} f(x,y)\,dy = 0 \quad \text{pour tous } x,y \in [-1,1].$$

D'autre part, la fonction f n'est intégrable.

Exemple 5.12. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive, μ une mesure sur $[a,b]$ et

$$A = \{(x,y) : x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Alors

$$\int\limits_{[a,b]} f d\mu = \int\limits_{[a,b]\times\mathbb{R}} I_A(x,y)(\mu \otimes \lambda)(x,y).$$