1 Espaces des fonctions régulières

1.1 Définitons et exemples

Soit $k \geq 0$ un entier et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. On utilise les notations suivantes:

$$C^k(I) = \{\varphi : I \to \mathbb{R},\ \varphi \text{ est } k \text{ fois continûment différentiable}\}$$
$$C^\infty(I) = \bigcap_{k\geq 0} C^k(I).$$

Pour $k = 0$, on écrit $C(I)$ au lieu de $C^0(I)$.

Définition 1.1. Soit $\varphi \in C(I)$. L'ensemble

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in I,\ \varphi(x) \neq 0\}}$$

est appelé le *support* de φ.

Exemple 1.2. Soit $I = \mathbb{R}$ et $\varphi(x) = x$. Alors $\operatorname{supp}\varphi = \mathbb{R}$. Si on considère la même finction φ comme un élément de $C(]-1,1[)$, alors $\operatorname{supp}\varphi =]-1,1[$.

Pour $0 \leq k \leq \infty$, on pose

$$C_0^k(I) = \{\varphi \in C^k(I),\ \operatorname{supp}\varphi \text{ est compact dans } I\}.$$

Proposition 1.3. *L'espace $C_0^\infty(I)$ est non vide.*

Démonstration. Soit

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Il est facile à vérifier que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Si $I \supset [a,b]$ avec a, b finis, alors la fonction $\varphi(x) = f(x-a)f(b-x)$ appartient à $C_0^\infty(I)$. □

1.2 Partition de l'unité

Proposition 1.4. *Soit $K \subset I$ un ensemble compact. Alors il existe une fonction $\varphi \in C_0^\infty(I)$ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$ et $\varphi(x) = 1$ pour $x \in K$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $K \subset [-a,a]$ et $I \supset [-b,b]$. Consiérons la fonction

$$g(t) = C^{-1}\int_0^t f(s)f(1-s)\,ds,$$

où f est défini par (1.1), et $C = \int_0^1 f(s)f(1-s)\,ds$. Alors $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, $g(t) = 0$ pour $t \leq 0$, $g(t) = 1$ pour $t \geq 1$, et $0 \leq g \leq 1$. La fonction

$$\varphi(x) = g\Big(\frac{b^2 - x^2}{b^2 - a^2}\Big)$$

vérifie toutes les conditions requises. □

Théorème 1.5. *Soit* $K \subset \mathbb{R}$ *un ensemble compact couvert par des intervalles ouverts* $I_1, \dots, I_m$. *Alors il existe des fonctions non négatives* $\varphi_j \in C_0^\infty(I_j)$, $j = 1, \dots, m$, *telles que*

$$\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) \leq 1 \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) = 1 \quad \textit{dans un voisinage de } K.$$

Voir [LS98, Zui02] pour la démonstration.