2 Distributions en dimension $d = 1$

2.1 Définitions et exemples

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. On note $\mathcal{D}(I) = C_0^\infty(I)$.

Définition 2.1. Soit $f : \mathcal{D}(I) \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonctionnelle linéaire. On dit que f est une *distribution* sur I si pour tout ensemble compact $K \subset I$ il existe un entier $m \geq 0$ et une constante $C > 0$ tels que

$$|f(\varphi)| \leq C\,\|\varphi\|_{C^m(K)} \quad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(K),$$

où $C_0^\infty(K)$ désigne l'espace des fonctions $\varphi \in C_0^\infty(I)$ avec un support dans K,

$$\|\varphi\|_{C^m(K)} := \sup_{x \in K} \sum_{l=0}^{m} |\varphi^{(l)}(x)|.$$

On note $\mathcal{D}'(I)$ l'ensemble des distributions sur I; c'est un espace vectoriel. La valeur de f sur φ est notée

$$f(\varphi) = (f, \varphi) = \int_I f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Exemples 2.2. (a) *Fonction de Dirac:*

$$\delta(\varphi) = \varphi(0).$$

(b) Soit $c_l \in \mathbb{R}$ et $a_l \in I$ pour $l = 1, \ldots, m$. Alors la fonctionnelle f définie par

$$f(\varphi) = \sum_{l=0}^{m} c_l \varphi^{(l)}(a_l)$$

est une distribution.

(c) Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$. Alors on peut considérer f comme une distribution sur I :

$$f(\varphi) = \int_I f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Proposition 2.3. *Une fonctionnelle linéaire $f : \mathcal{D}(I) \to \mathbb{R}$ est une distribution si et seulement si elle possède la propreté suivante :*

(P) *si $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{D}(I)$ est une suite telle que*

$$\operatorname{supp}\varphi_j \subset K \quad \textit{pour tout } j \geq 1 \tag{2.1}$$

$$\|\varphi_j\|_{C^m(K)} \to 0 \quad \textit{quand } j \to \infty \textit{ pour tout } m \geq 0, \tag{2.2}$$

où $K \subset I$ est un compact, alors $f(\varphi_j) \to 0$ quand $j \to \infty$.

Démonstration. Il est claire que si f est une distribution, alors elle vérifie la propriété (P). Montrons l'implication réciproque. Supposons qu'il existe un compact $K \subset I$ et une suite $\psi_j \subset C_0^\infty(K)$ tels que

$$|f(\psi_j)| \geq j\|\psi_j\|_{C^j(K)} \quad \text{pour tout } j \geq 1.$$

Soit

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{j\|\psi_j\|_{C^j(K)}}.$$

Alors la suite $\{\varphi_j\}$ vérifie les propriétés (2.1), (2.2). D'autre part, $|f(\varphi_j)| \geq 1$ pour tout $j \geq 1$. La contradiction obtenue montre que f est une distribution. $\square$

Exemple 2.4. *Valeur principale de* $\frac{1}{x}$. On définit une fonctionnelle par

$$\text{v.p.}\, \frac{1}{x}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx.$$

Montrons que v.p. $\frac{1}{x}$ est une distribution sur $\mathbb{R}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction portée par l'intervalle $[-R, R]$. Alors

$$\begin{aligned}\text{v.p.}\, \frac{1}{x}(\varphi) &= \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\, dx + \int_{R}^{\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\, dx\right) \\ &= \int_{-R}^{R}\int_0^1 \varphi'(tx)\, dt dx.\end{aligned}$$

Donc v.p. $\frac{1}{x}$ est bien défini et linéaire. Montrons que v.p. $\frac{1}{x}$ vérifie la propriété (P) de la proposition 2.3. Supposons que $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est une suite telle que (2.1), (2.2) ont lieu. Alors

$$\left|\text{v.p.}\, \tfrac{1}{x}(\varphi_k)\right| \leq \sup_{|x|\leq R} |\varphi_k'(x)| \to 0 \quad \text{quand } k \to \infty.$$

Exercice 2.5. Soit $\{a_l\} \subset I$ une suite sans point d'accumulation dans I et $c_l \in \mathbb{R}$ des constantes. Montrer que la fonctionnelle f définie par

$$f(\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \varphi^{(l)}(a_l)$$

est une distribution sur I.

2.2 Convergence des distributions

Définition 2.6. Soit $f_n, f \in \mathcal{D}'(I)$. On dit que la suite $\{f_n\}$ converge vers f dans $\mathcal{D}'(I)$ si

$$f_n(\varphi) \to f(\varphi) \quad \text{quand } n \to \infty$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(I)$.

Exemples 2.7. (a) Soit
$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-n^2x^2/2}.$$

Alors $\{f_n\}$ converge vers δ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors
$$\begin{aligned} f_n(\varphi) &= \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-n^2x^2/2} \varphi(x)\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} \varphi(y/n)\, dy \to \varphi(0) \quad \text{quand } n \to \infty, \end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée.

(b) Soit $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{x+i\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$. Montrons que
$$f_\varepsilon \to -i\pi\delta + \text{v.p.}\, \frac{1}{x} \quad \text{quand } \varepsilon \to 0^+.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ with $\operatorname{supp} \varphi \subset [-R, R]$. Alors
$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0^+} f_\varepsilon(\varphi) &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \int_{-R}^{R} \frac{(x - i\varepsilon)}{x^2 + \varepsilon^2}\, dx\, \varphi(0) + \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x + i\varepsilon}\, dx \right\} \\ &= -2i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \to 0^+} \arctan \frac{R}{\varepsilon} + \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx \\ &= -i\pi\varphi(0) + \text{v.p.}\, \frac{1}{x}(\varphi). \end{aligned}$$

Exercice 2.8. **(i)** Soit $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction telle que
$$\omega \geq 0, \qquad \int_{\mathbb{R}} \omega(x)\, dx = 1.$$

Montrer que la suite $\omega_n(x) = n\omega(nx)$ converge vers la fonction de Dirac δ quand $n \to \infty$.

(ii) Soit $f_n(x) = \frac{1}{\pi x} \sin(nx)$. Montrer que $f_n \to \delta$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand $n \to \infty$. *Indication:* utiliser le fait que
$$\int_{-A}^{A} \frac{\sin x}{x}\, dx \to \pi \quad \text{quand } A \to +\infty.$$

Théorème 2.9. (sans démonstration) *Soit $\{f_n\} \subset \mathcal{D}'(I)$ une suite telle que $\{f_n(\varphi)\}$ converge pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. Alors il existe $f \in \mathcal{D}'(I)$ tel que $f_n \to f$ dans $\mathcal{D}'(I)$ quand $n \to \infty$.*

2.3 Support des distributions

Définition 2.10. Soit $f \in \mathcal{D}'(I)$ une distribution et $J \subset I$ un ouvert. On dit que f *est nulle sur* J si $f(\varphi) = 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\operatorname{supp} \varphi \subset J$. Si $g \in \mathcal{D}'(I)$ est une autre distribution, alors on dit que f *est égale à* g *sur* J si la différence $f - g$ est nulle sur J.

Proposition 2.11. *Soit $f \in \mathcal{D}'(I)$ et $J \subset I$ un ouvert. Supposons que pour tout $x \in J$ il existe un voisinage $O_x \subset I$ tel que $f = 0$ sur O_x. Alors f est nulle sur J.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(J)$, c'est-à-dire, $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ et $\operatorname{supp} \varphi \subset J$. On veut montrer que $f(\varphi) = 0$. Par l'hypothèse, pour tout $x \in \operatorname{supp} \varphi$ il existe un ouvert $O_x \subset I$ tel que $f = 0$ sur O_x. Comme $\operatorname{supp} \varphi$ est compact, on peut choisir des points $x_1, \dots, x_m \in I$ tels que

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \bigcup_{j=1}^{m} O_{x_j}. \tag{2.3}$$

Soit $\{\varphi_j\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (2.3), c'est-à-dire, $\varphi_j \in C_0^\infty(O_{x_j})$ pour $j = 1, \dots, m$ et $\sum_j \varphi_j = 1$ sur $\operatorname{supp} \varphi$. Alors

$$f(\varphi) = \Big(f, \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \varphi\Big) = \sum_{j=1}^{m} (f, \varphi_j \varphi) = 0\,,$$

où on a utilisé le fait que $\varphi_j \varphi \in C_0^\infty(O_{x_j})$. □

Définition 2.12. Soit $f \in \mathcal{D}'(I)$. On note $\mathcal{N}_f \subset I$ l'ouvert maximal sur lequel f est nulle. Le complémentaire de $\mathcal{N}_f$ dans I est appelé le *support de* f et noté $\operatorname{supp} f$.

Exemple 2.13. Montrons que $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$. En effet, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est une fonction telle que $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors $\delta(\varphi) = \varphi(0) = 0$.

Théorème 2.14. *Soit $f \in C(I)$. Alors le support de f au sens des distributions est confondu avec le support usuel de f, c'est-à-dire,*

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in I,\ f(x) \neq 0\}}. \tag{2.4}$$

Démonstration. On note F l'ensemble figurant dans le membre de droite de la relation (2.4). Il est claire que si $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ est une fonction avec un support dans $I \setminus F$, alors $f(\varphi) = 0$. Donc, $\operatorname{supp} f \subset F$.

Montrons maintenant que $F \subset \operatorname{supp} f$. Soit $x_0 \notin \operatorname{supp} f$. Alors il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant le point x_0 tel que la distribution f est nulle sur J. Montrons que $f(x) = 0$ pour tout $x \in J$. Si ce n'est pas le cas, alors il existe un intervalle $J' \subset J$ et une constante $\varepsilon > 0$ tel que

$$|f(x)| \geq \varepsilon \quad \text{pour } x \in J'.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(J')$ une fonction non négative qui n'est pas identiquement nulle. Alors
$$|f(\varphi)| = \left| \int_{J'} f(x)\varphi(x)\, dx \right| \geq \varepsilon \int_{J'} \varphi(x)\, dx \neq 0.$$
Donc, f n'est pas nulle sur J. La contradiction obtenue entraîne que $f(x) = 0$ pour tout $x \in J$, d'où on conclut que $x_0 \notin F$. $\square$

Exercice 2.15. Soit $f \in \mathcal{D}'(I)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. Supposons que $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \varphi = \varnothing$. Montrer que $(f, \varphi) = 0$.