3 Opérations sur les distributions

3.1 Composition avec un difféomorphisme

Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Alors $x = ay + b$ est une application affine qui définit un isomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(ay+b)\varphi(y)\,dy = |a|^{-1}\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi\big(\tfrac{x-b}{a}\big)\,dx.$$

De même, si $u : J \to I$ est un difféomorphisme, alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(u(y))\varphi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{\varphi(u^{-1}(x))}{|u'(u^{-1}(x)|}\,dx.$$

Définition 3.1. Soit $u : J \to I$ un difféomorphisme et $f \in \mathcal{D}'(I)$. On définit la composition $f \circ u$ par la relation

$$(f \circ u, \varphi) = \big(f, |u' \circ u^{-1}|^{-1}\varphi \circ u^{-1}\big).$$

Proposition 3.2. *L'application $f \mapsto f \circ u$, $\mathcal{D}'(I) \to \mathcal{D}'(J)$, est linéaire et continue.*

Exercice 3.3. Démontrer la proposition.

Exemples 3.4. (a) *Dilatation:* $u(y) = cy$. Dans ce cas,

$$(f(cy), \varphi) = \frac{1}{|c|}(f, \varphi(x/c)).$$

(b) *Translation:* $u(y) = y - b$. Dans ce cas,

$$(f(y-b), \varphi) = (f, \varphi(x+b)).$$

Par exemple, si $f = \delta$, alors

$$\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x), \quad \delta(x-b) = \delta_b(x),$$

où $(\delta_b, \varphi) = \varphi(b)$.

Proposition 3.5. *Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Si $c_n \in \mathbb{R}$ et $c_n \to c \neq 0$, alors*

$$f(c_n x) \to f(cx) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ quand } n \to \infty.$$

De même, si $b_n \in \mathbb{R}$ et $b_n \to b$, alors

$$f(x - b_n) \to f(x-b) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ quand } n \to \infty.$$

Démonstration. Pour simplifier, supposons que $c > 0$. Alors pour $n \gg 1$ et toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a

$$\big(f(c_n x), \varphi\big) = \big(f, c_n^{-1}\varphi(c_n^{-1}x)\big). \tag{3.1}$$

Comme $c_n \to c$, la suite $c_n^{-1}\varphi(c_n^{-1}x)$ converge vers $c^{-1}\varphi(c^{-1}x)$ dans l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Il s'ensuit que le membre de droite dans la relation (3.1) tend vers

$$\big(f, c^{-1}\varphi(c^{-1}x)\big) = \big(f(cx), \varphi\big).$$

La démonstration de la deuxième propriété est analogue. □

Proposition 3.6. *Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution telle que $f(x-b) = f(x)$ pour tout $b \in \mathbb{R}$. Alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $f = c$ sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}$ on a

$$(f(x-b), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x+b)) = (f(x), \varphi(x)),$$

d'où on voit que

$$\Big(f(x), \frac{\varphi(x+b) - \varphi(x)}{b}\Big) = 0 \quad \text{pour tout } b \neq 0. \tag{3.2}$$

Il est facile à montrer que $\frac{\varphi(x+b)-\varphi(x)}{b} \to \varphi'(x)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ quand $b \to 0$. Donc, en passant à la limite dans (3.2), on obtient

$$(f, \varphi') = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(R). \tag{3.3}$$

Soit $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\int_{\mathbb{R}} \varphi_0 dx = 1$. Alors pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que

$$\psi - \Big(\int_{\mathbb{R}} \psi dx\Big)\varphi_0 = \varphi'.$$

Il résulte de (3.3) que

$$(f, \psi) = (f, \varphi') + \Big(\int_{\mathbb{R}} \psi dx\Big)(f, \varphi_0) = (f, \varphi_0)\int_{\mathbb{R}} \psi dx.$$

Nous avons montré que $f = (f, \varphi_0)$. □

3.2 Multiplication par une fonction régulière

Définition 3.7. Soit $f \in \mathcal{D}'(I)$ et $a \in C^\infty(I)$. On définit le produit af par la relation

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Exercice 3.8. Montrer que la multiplication par une fonction $a \in C^\infty(I)$ est bien définie (c'est-à-dire, $af \in \mathcal{D}'(I)$).

Proposition 3.9. **(i)** *Si* $f_n \to f$ *dans* $\mathcal{D}'(I)$ *et* $a \in C^\infty(I)$*, alors* $af_n \to af$ *dans* $\mathcal{D}'(I)$*.*

(ii) *Si* $f \in \mathcal{D}'(I)$ *et* $a_n \to a$ *dans* $C^\infty(I)$*, alors* $a_n f \to af$ *dans* $\mathcal{D}'(I)$*.*

Démonstration. **(i)** Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, la fonction af appartient à $\mathcal{D}(I)$. Donc, on a

$$(af_n, \varphi) = (f_n, a\varphi) \to (f, a\varphi) = (af, \varphi) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

(ii) Rappelons que $a_n \to a$ dans $C^\infty(I)$ si pour tout entier $j \geq 0$ et tout compact $K \subset I$,

$$\sup_{x \in K} \left| a_n^{(j)}(x) - a^{(j)}(x) \right| \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

On voit que si $a_n \to a$ dans $C^\infty(I)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, alors $a_n\varphi \to a\varphi$ dans $\mathcal{D}(I)$. Donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$,

$$(a_n f, \varphi) = (f, a_n\varphi) \to (f, a\varphi) = (af, \varphi) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

□

Remarque 3.10. On peut montrer que si $f_n \to f$ dans $\mathcal{D}'(I)$ et $a_n \to a$ dans $C^\infty(I)$, alors $a_n f_n \to af$ dans $\mathcal{D}'(I)$.

Proposition 3.11. *Pour tout* $a \in C^\infty(I)$ *et* $f \in \mathcal{D}'(I)$*, on a*

$$\operatorname{supp}(af) = \operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} f.$$

En particulier, si $\operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} f = \varnothing$*, alors* $af = 0$*.*

Démonstration. Soit $O = I \setminus (\operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} f)$ et $\varphi \in C_0^\infty(O)$. Comme

$$\operatorname{supp}(a\varphi) = \operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} \varphi \subset I \setminus \operatorname{supp} f,$$

on a $(af, \varphi) = (f, a\varphi) = 0$. On conclut que af est nul sur toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(O)$, d'où le résultat cherché. □

Exemples 3.12. (a) $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$.

(b) $x\left(\text{v.p.}\,\frac{1}{x}\right) = 1$.

Exercice 3.13. Soit $f \in \mathcal{D}'(I)$ et $\eta \in C^\infty(I)$ tels que $\eta = 1$ dans un voisinage de $\operatorname{supp} f$. Montrer que $\eta f = f$.

3.3 Dérivation

Définition 3.14. Soit $f \in \mathcal{D}'(I)$ et $k \geq 1$ un entier. On définit

$$(f^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (f, \varphi^{(k)}) \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Exercice 3.15. Montrer que $f^{(k)} \in \mathcal{D}'(I)$ pour tout $k \geq 1$. En particulier, toute distribution est infiniment différentiable.

Proposition 3.16. **(i)** *Si $f_n \to f$ dans $\mathcal{D}'(I)$, alors $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ dans $\mathcal{D}'(I)$.*

(ii) *Si $f \in \mathcal{D}'(I)$ et $a \in C^\infty(I)$, alors*

$$(af)' = a'f + af'.$$

(iii) *Si $J \subset I$ est un sous-intervalle et $f = 0$ sur J, alors $f^{(k)} = 0$ sur $J \subset I$. En particulier,* $\operatorname{supp} f^{(k)} \subset \operatorname{supp} f$.

Démonstration. **(i)** Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. Alors

$$(f_n^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (f_n, \varphi^{(k)}) \to (-1)^k (f, \varphi^{(k)}) = (f^{(k)}, \varphi).$$

(ii) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on a

$$((af)', \varphi) = -(af, \varphi') = -(f, a\varphi') = -(f, (a\varphi)') + (f, a'\varphi) = (af' + a'f, \varphi).$$

(iii) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(J)$. Alors $\varphi^{(k)} \in \mathcal{D}(J)$, et donc

$$(f^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (f, \varphi^{(k)}) = 0.$$

□

Exemples 3.17. (a) Soit θ la fonction de Heaviside:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Alors $\theta' = \delta$.

(b) Calculons δ' :

$$(\delta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = -\varphi'(0).$$

Théorème 3.18. *Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ une fonction telle que $f \in C^1(]-\infty, x_0])$ et $f \in C^1([x_0, -\infty[)$. Alors*

$$f' = \{f'\} + [f]_{x_0} \delta(x - x_0),$$

où $[f]_{x_0} = f(x_0^+) - f(x_0^-)$ et $\{f'\}$ désigne la dérivée classique de f.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}(f', \varphi) = -(f, \varphi') &= -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)\,dx - \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx \\ &= -f\varphi\Big|_{-\infty}^{x_0} + \int_{-\infty}^{x_0} f'\varphi\,dx - f\varphi\Big|_{x_0}^{+\infty} + \int_{x_0}^{+\infty} f'\varphi\,dx \\ &= \big(f(x_0^+) - f(x_0^-)\big)\varphi(x_0) + \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\,dx \\ &= [f]_{x_0}(\delta(x - x_0), \varphi) + (\{f'\}, \varphi).\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.19. *Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ tel que $f \in C^1(J_k)$, $k = 0, \ldots, n$, où*

$$J_0 =]-\infty, a_1], \quad J_1 = [a_1, a_2], \quad \ldots, \quad J_n = [a_n, +\infty[.$$

Alors

$$f' = \{f'\} + \sum_{k=1}^{n} [f]_{a_k} \delta(x - a_k).$$

Exemples 3.20. (a) La solution générale de l'équation

$$x^m u = 0 \tag{3.4}$$

est donnée par la relation

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \delta^{(k)}(x). \tag{3.5}$$

En effet, il est facile à vérifier que la fonction (3.5) est solution de l'équation (3.4). Montrons qu'il n'y a pas d'autres solutions.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^m}{m!} \int_0^1 (1 - t)^{m-1} \varphi^{(m)}(tx)\,dt.$$

Soit $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction égale à 1 dans le voisinage de $x = 0$. On pose

$$\psi(x) = \frac{1}{x^m}\Big(\varphi(x) - \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k\Big).$$

Il est facile à voir que $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est solution de l'équation (3.4), alors

$$(u, \varphi) = \Big(u, \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k\Big) + (u, x^m\psi) = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi^{(k)}(0) \Big(u, \frac{\eta x^k}{k!}\Big).$$

Cette relation implique que la distribution u est reprsentable sous la forme (3.5) avec $a_k = (-1)^k (u, \eta x^k)/k!$.

(b) Considérons l'équation

$$u' = 0, \quad u \in \mathcal{D}'(I). \tag{3.6}$$

Exercice 3.21. Montrer que toute solution de l'équation (3.6) est constante.

Indication: utiliser la démonstration de la proposition 3.6.

(c) Considérons l'équation

$$u' = f, \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{3.7}$$

Si $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont deux solutions, alors $(u_1 - u_2)' = 0$, d'où on conclut que $u_1 - u_2 = \text{const}$. Pour construire une solution, on note que

$$(u, \varphi') = -(f, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Soit $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\int \varphi_0 dx = 1$. Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que

$$\varphi - \langle\varphi\rangle\, \varphi_0 = \psi', \qquad \langle\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, dy.$$

Il s'ensuit que

$$(u, \psi') = (u, \varphi - \langle\varphi\rangle\varphi_0) = -(f, \psi).$$

La solution est définie à une constante près. Supposons que $(u, \varphi_0) = 0$. Alors

$$(u, \varphi) = -(f, \psi), \quad \psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \big(\varphi(y) - \langle\varphi\rangle\varphi_0(y)\big)\, dy.$$

(d) Considérons un opérateur différentiel de la forme

$$Lf(x) = f^{(m)} + a_1(x) f^{(m-1)} + \cdots + a_m(x) f, \quad a_j \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Soit $Z \in C^\infty(\mathbb{R})$ la solution du problème

$$Lf = 0, \quad f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(m-2)}(0) = 0, \quad f^{(m-1)}(0) = 1.$$

Alors la fonction $\mathcal{E}(x) = \theta(x) Z(x)$ vérifie l'équation

$$Lf = \delta. \tag{3.8}$$

En effet, en utilisant le théorème 3.18, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(k)}(x) &= \theta(x) Z^{(k)}(x) \quad \text{pour } k = 1, \ldots, m-1, \\ \mathcal{E}^{(m)}(x) &= \delta(x) + \theta(x) Z^{(m)}(x). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$L\mathcal{E}(x) = \delta(x) + \theta(x) LZ(x) = \delta(x).$$

Exercice 3.22. Montrer que

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \text{v.p.}\,\frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx}\,\text{v.p.}\,\frac{1}{x} = -\,\text{v.p.}\,\frac{1}{x^2},$$

où

$$\big(\text{v.p.}\,\tfrac{1}{x^2}, \varphi\big) = \text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx.$$

Exercice 3.23. Trouver les solutions générales des équations suivantes:

$$xu' = 1, \quad xu' = \text{v.p.}\,\frac{1}{x}, \quad x^2u' = 1.$$