4 Distributions en dimension $d > 1$

4.1 Fonctions régulières et partition de l'unité

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert. On note $C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions k fois continûment différentiables dans Ω,

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega), \quad \mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega), \operatorname{supp} \varphi \Subset \Omega\}.$$

Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, alors on note

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d, \quad \partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Lemme 4.1. *L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas vide. De plus, pour tout ensemble compact $K \subset \Omega$ il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\varphi = 1$ sur K.*

Démonstration. Soit

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0 \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

Alors $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. On définit une fonction $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ par $\omega(x) = f(1 - |x|^2)$. Soit $x_0 \in \Omega$. Alors la fonction $\omega\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right)$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$ pour $\varepsilon \ll 1$.

On fixe maintenant un compact $K \subset \Omega$ et on note $K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}(x, K) \le \delta\}$. Soit $\varepsilon > 0$ tellement petit que $K_{2\varepsilon} \subset \Omega$ et

$$\psi(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, K_{2\varepsilon}^c)}{\operatorname{dist}(x, K_\varepsilon) + \operatorname{dist}(x, K_{2\varepsilon}^c)}.$$

Il est facile à voir que $\psi \in C(\mathbb{R}^d)$, $\psi(x) = 1$ pour $x \in K_\varepsilon$ et $\psi(x) = 0$ pour $x \in K_{2\varepsilon}^c$. Soit $C = \int_{\mathbb{R}^d} \omega(x)\, dx$. Alors la fonction

$$\varphi(x) = C^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) \omega_\varepsilon(x - y)\, dy, \quad \omega_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} \omega(x/\varepsilon),$$

vérifie toutes les propriétés requises. □

Théorème 4.2. *Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact couvert par des ouverts $\Omega_1, \dots, \Omega_m$. Alors il existe des fonctions non négatives $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega_j)$, $j = 1, \dots, m$, telles que*

$$\sum_{j=1}^m \varphi_j \le 1, \quad \sum_{j=1}^m \varphi_j = 1 \text{ dans un voisinage ouvert de } K.$$

Voir [LS98, Zui02] pour la démonstration.

4.2 Distributions: définitions et propriétés élémentaires

Définition 4.3. Soit $f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonctionnelle linéaire. On dit que f est une distribution si pour tout $K \Subset \Omega$ il existe un entier $m \geq 0$ et une constante $C > 0$ tels que

$$|f(\varphi)| \leq C\, \|\varphi\|_{C^m} \quad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(K).$$

Notation:

$$f(\varphi) = (f, \varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx.$$

Exemples 4.4. (a) La fonction de Dirac concentrée au point $x_0 \in \mathbb{R}^d$:

$$(\delta_{x_0}, \varphi) = \varphi(x_0).$$

(b) Toute fonction f localement intégrable dans Ω définit une distribution :

$$(f, \varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx.$$

(c) Soit $\alpha^j \in \mathbb{Z}_+^d$, $a_j \in \mathbb{R}^d$ et $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$. Alors la fonctionnelle $f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par la relation

$$(f, \varphi) = \sum_{j=1}^m c_j \partial^{\alpha^j} \varphi(a_j)$$

est une distribution.

Proposition 4.5. *Soit $f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. Alors $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ssi f vérifie la propriété suivante :*

(P) *si $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ est une suite telle que*

$$\operatorname{supp} \varphi_j \subset K \quad \textit{pour tout } j \geq 1,$$
$$\|\varphi_j\|_{C^m(K)} \to 0 \quad \textit{quand } j \to \infty \textit{ pour tout } m \geq 0,$$

où $K \subset \Omega$ est un compact, alors $f(\varphi_j) \to 0$ quand $j \to \infty$.

Si $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ est une suite vérifiant la propriété (P) pour un ensmble compact $K \subset \Omega$, alors on dit que $\{\varphi_j\}$ converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Exercice 4.6. Démontrer la proposition.

Définition 4.7. Soit $\{f_k\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ une suite. On dit que $\{f_k\}$ converge vers $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si

$$(f_k, \varphi) \to (f, \varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exemple 4.8. Soit $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\omega \geq 0$, $\int \omega\, dx = 1$. Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$\omega_n(x) := n^d \omega(n(x - x_0)) \to \delta(x - x_0) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d).$$

Théorème 4.9. (sans démonstration) *Soit* $\{f_k\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ *une suite telle que* (f_k, φ) *converge pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. *Alors il existe* $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *tel que* $f_k \to f$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition 4.10. Soit $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\Omega_1 \subset \Omega$ un ouvert. On dit que f est nulle dans Ω_1 si

$$(f, \varphi) = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On note $\mathcal{N}_f$ l'ouvert maximal dans lequel f est nulle. L'ensemble fermé $\Omega \setminus \mathcal{N}_f$ est appelé le support de f :

$$\operatorname{supp} f = \Omega \setminus \mathcal{N}_f.$$

Exemples 4.11. (a) Soit $f \in C(\Omega)$. Alors $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$.

(b) Soit $\alpha^j \in \mathbb{Z}_+^d$, $a_j \in \mathbb{R}^d$ et $c_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $j = 1, \ldots, m$. Soit

$$(f, \varphi) = \sum_{j=1}^{m} c_j \partial^{\alpha^j} \varphi(a_j), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

Alors $\operatorname{supp} f = \{a_1, \ldots, a_m\}$.

(c) Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et $\Omega_1 \subset \Omega$ un ouvert. Alors $f\big|_{\Omega_1} = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \Omega_1$.

Proposition 4.12. *Soit* $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *et* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. *Si* $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \varphi = \varnothing$, *alors* $(f, \varphi) = 0$.

Démonstration. Comme $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \varphi = \varnothing$, on a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{N}_f)$, d'où on voit que $(f, \varphi) = 0$. □

4.3 Opérations sur les distributions

4.3.1 Composition avec un difféomorphisme

Soit $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^d$ des ouverts et $u : \Omega' \to \Omega$ un difféomorphisme. Si $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, alors on définit $f \circ u \in \mathcal{D}'(\Omega')$ par la relation

$$(f \circ u, \varphi) = \int_\Omega f(x) \frac{\varphi(u^{-1}(x))}{|J_u(u^{-1}(x))|}\, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega'),$$

où $J_u(x)$ désigne le Jacobien de u au point x.

Exercice 4.13. Montrer que la fonctionnelle $f \circ \varphi$ appartient à $\mathcal{D}'(\Omega')$ et que l'application

$$f \mapsto f \circ \varphi, \quad \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega'),$$

est continue.

4.3.2 Multiplication par une fonction régulière

Soit $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $a \in C^\infty(\Omega)$. On définit $af \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par la relation

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exercice 4.14. Montrer que $af \in \mathcal{D}'(\Omega')$ et que l'application

$$f \mapsto af, \quad C^\infty(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega),$$

est continue par rapport à chaqu'un de ses arguments.

4.3.3 Dérivation

Soit $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ un multi-indice. On définit

$$(\partial^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, \partial^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exercice 4.15. Montrer que $\partial^\alpha f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et que l'application

$$f \mapsto \partial^\alpha f, \quad \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega),$$

est continue.

Exemple 4.16. Considérons l'équation des ondes :

$$Lu := \partial_t^2 u - a^2 \partial_x^2 u = 0. \tag{4.1}$$

Si $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, alors la fonction

$$u(t,x) = f(x - at) + g(x + at) \tag{4.2}$$

vérfie l'équation (4.1) au sens classique. Montrons que si $f, g \in C(\mathbb{R})$, alors (4.2) est une solution de (4.1) au sens des distributions. En effet, soit $f_n, g_n \in C^2(\mathbb{R})$ deux suites telles que

$$f_n \to f,\ g_n \to g \text{ uniformément sur tout intervalle compact.}$$

Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_n(x - at)\varphi(t,x)\, dtdx \to \int_{\mathbb{R}^2} f(x - at)\varphi(t,x)\, dtdx,$$
$$\int_{\mathbb{R}^2} g_n(x + at)\varphi(t,x)\, dtdx \to \int_{\mathbb{R}^2} g(x + at)\varphi(t,x)\, dtdx.$$

Comme la dérivarion est continue dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, on voit que la suite des distributions

$$u_n(t,x) = f_n(x - at) + g_n(x + at)$$

converge vers (4.2) avec toutes ses dérivées. En particulier,

$$0 = Lu_n \to Lu \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),$$

d'où on conclut que $Lu = 0$.