5 Produit tensoriel

5.1 Définitions et exemples

Soient $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, et $g(y)$, $y \in \mathbb{R}^k$, deux fonctions localement intégrables. Alors $f(x)g(y)$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}^{d+k}$, et l'on peut définir une distribution sur $\mathbb{R}^{d+k}$:

$$\begin{aligned}(f(x)g(y), \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^{d+k}} f(x)g(y)\varphi(x,y)\,dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\left\{\int_{\mathbb{R}^k} g(y)\varphi(x,y)\,dy\right\}dx.\end{aligned}$$

Définition 5.1. Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^k)$. On définit le produit tensoriel de f et g comme une distribution $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+k})$ telle que

$$(h, \varphi) = \big(f(x), (g(y), \varphi(x,y))\big) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+k}).$$

On note $h = f(x) \otimes g(y)$.

Il faut vérifier que le produit est bien défini. Pour simplifier, on suppose dans la suite que $d = k = 1$.

Lemme 5.2. *Soit $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Alors la fonction*

$$\psi(x) := \big(g(y), \varphi(x,y)\big)$$

appartient à l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et pour tout entier $j \geq 0$ on a

$$\psi^{(j)}(x) = \big(g(y), \partial_x^j \varphi(x,y)\big)$$

De plus, si $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et $\varphi_k \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, alors la suite

$$\psi_k(x) := \big(g(y), \varphi_k(x,y)\big)$$

converge vers ψ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Démonstration. La fonction $\psi(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $\varphi(x,y) = 0$ pour $|x| \geq R \gg 1$, le support de ψ est inclut dans la boule $B_R \subset \mathbb{R}$ de centre zéro et de rayon R. Montrons que ψ est continu. En effet, soit $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ une suite convergeant vers $x \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi(x_n, \cdot) \to \varphi(x, \cdot)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Il s'ensuit que $\psi(x_n) \to \psi(x)$.

Montrons que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et

$$\psi^{(j)}(x) = \big(g(y), \partial_x^j \varphi(x,y)\big) \quad \text{pour tout } j \geq 1. \tag{5.1}$$

Soit $h_n \to 0$. Alors

$$\frac{\varphi(x+h_n, y) - \varphi(x,y)}{h_n} \to \partial_x \varphi(x,y) \quad \text{dans l'espace } \mathcal{D}(\mathbb{R}_y),$$

d'où on voit que

$$h_n^{-1}(\psi(x+h_n)-\psi(x)) = \big(g(y), h_n^{-1}(\varphi(x+h_n,y)-\varphi(x,y))\big) \to (g(y), \partial_x\varphi(x,y)).$$

On a montré la relation (5.1) pour $j=1$. Par récurrence, on peut établir (5.1) pour $j \geq 2$.

Soit maintenant $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ une suite telle que $\varphi_k \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Alors les supports des fonctions $\psi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sont bornés uniformément par rapport à k. Montrons que pour tout $j \geq 0$

$$\psi_k^{(j)}(x) \to \psi^{(j)}(x) \quad \text{quand } k \to \infty \text{ uniformément en } x \in \mathbb{R}.$$

Si ce n'est pas le cas, alors il existe un entier $j \geq 0$, une constante $\varepsilon > 0$ et des suites $\{x_l\} \subset \mathbb{R}$ et $k_l \to \infty$ tels que

$$|\psi_{k_l}^{(j)}(x_l) - \psi^{(j)}(x_l)| \geq \varepsilon \quad \text{pour tout } l \geq 1, \tag{5.2}$$

$$\{x_l\} \text{ converge vers un point } \hat{x} \text{ quand } l \to \infty. \tag{5.3}$$

D'autre part, la convergence (5.3) entraîne que $\varphi_{k_l}(x_l,\cdot) \to \varphi(\hat{x},\cdot)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Comme $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on obtient

$$\psi_{k_l}^{(j)}(x_l) = \big(g(y), \partial_x^j\varphi_{k_l}(x_l,\cdot)\big) \to \big(g(y), \partial_x^j\varphi(\hat{x},\cdot)\big) = \psi^{(j)}(\hat{x}).$$

C'est une contradiction avec l'inégalité (5.2).

□

Le lemme 5.2 permet de justifier la définition du produit tensoriel. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, alors la fonction $\psi(x) = (g(y), \varphi(x,y))$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et l'on peut considérer (f,ψ). Evidemment, la fonctionnelle

$$\varphi \mapsto (f,\psi) = \big(f(x), (g(y), \varphi(x,y))\big) \tag{5.4}$$

est linéaire. Si $\varphi_k \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, alors $\psi_k = (g(y), \varphi_k(x,y))$ converge vers ψ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par conséquent,

$$(f,\psi_k) \to (f,\psi) \quad \text{quand } k \to \infty,$$

et donc la fonctionnelle (5.4) est continue.

Exemples 5.3. (a) $\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)}$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors $f \otimes 1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ et

$$(f \otimes 1, \varphi) = \Big(f(x), \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y)\,dy\Big).$$

5.2 Propriétés du produit tensoriel

Théorème 5.4. **(a)** *Le produit tensoriel est commutative : si $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors*

$$f(x) \otimes g(y) = g(y) \otimes f(x).$$

(b) *Le produit tensoriel est continu : si $f_k \to f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors*

$$f_k(x) \otimes g(y) \to f(x) \otimes g(y) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

(c) *Le produit tensoriel est associative : si $f, g, h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors*

$$\big(f(x) \otimes g(y)\big) \otimes h(z) = f(x) \otimes \big(g(y) \otimes h(z)\big).$$

(d) *Dérivation du produit tensoriel : si $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors*

$$\partial_x^j \big(f(x) \otimes g(y)\big) = (\partial_x^j f(x)) \otimes g(y).$$

(e) *Multiplication par une fonction régulière : si $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, alors*

$$a(x)\big(f(x) \otimes g(y)\big) = (a(x)f(x)) \otimes g(y).$$

(f) *Translation du produit tensoriel : si $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}$, alors*

$$(f \otimes g)(x + b, y) = f(x + b) \otimes g(y).$$

Pour la démonstration de ce résultat, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 5.5. *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Alors il existe une suite $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ telle que*

$$\varphi_n \to \varphi \quad \text{dans } \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \tag{5.5}$$

$$\varphi_n(x, y) = \sum_{k=1}^{L_n} u_{nk}(x) v_{nk}(y), \tag{5.6}$$

où $u_{nk}, v_{nk} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Supposons que $\operatorname{supp} \varphi \subset B_R$. Soit $\{P_k(x, y)\}$ une suite de polynômes telle que

$$\|P_k - \varphi\|_{C^k(B_{2R})} < 1/k.$$

Si $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\chi = 1$ sur B_R et $\chi = 0$ sur B_{2R}^c, alors la suite

$$\varphi_k(x, y) = \chi(x)\chi(y)P_k(x, y)$$

vérifie toutes les propriétés requises. ☐

Démonstration du théorème 5.4. **(a)** Il faut montrer que

$$(f(x)\otimes g(y),\varphi)=(g(y)\otimes f(x),\varphi)\quad \text{pour tout } \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

Supposons d'abord que

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=1}^{L}u_n(x)v_n(y).$$

Alors

$$\begin{aligned}(f(x)\otimes g(y),\varphi)&=\sum_{n=1}^{L}(f(x)\otimes g(y),u_n(x)v_n(y))=\sum_{n=1}^{L}(f,u_n)\,(g,v_n),\\&=\sum_{n=1}^{L}(g(y)\otimes f(x),u_n(x)v_n(y))=(g(y)\otimes f(x),\varphi).\end{aligned}$$

Dans le cas général, on choist une suite $\{\varphi_n\}\subset\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ vérifiant (5.5), (5.6). Alors

$$(f(x)\otimes g(y),\varphi)=\lim_{n\to\infty}(f(x)\otimes g(y),\varphi_n)=\lim_{n\to\infty}(g(y)\otimes f(x),\varphi_n)=(g(y)\otimes f(x),\varphi).$$

(b) Soit $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Alors

$$(f_k\times g,\varphi)=(f_k(x),(g(\cdot),\varphi(x,\cdot)))\to(f(x),(g(\cdot),\varphi(x,\cdot)))=(f_k\times g,\varphi).$$

La démonstration des popriétés (c)–(f) est basée sur des idées analogues. □

Exemple 5.6. Soit $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}(f\otimes 1,\varphi)&=\Big(f(x),\int_{\mathbb{R}}\varphi(x,y)\,dy\Big),\\(1\otimes f,\varphi)&=\int_{\mathbb{R}}\big(f(x),\varphi(x,y)\big)\,dy.\end{aligned}$$

On conclut que

$$\Big(f(x),\int_{\mathbb{R}}\varphi(x,y)\,dy\Big)=\int_{\mathbb{R}}\big(f(x),\varphi(x,y)\big)\,dy\quad\text{pour tout }\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2). \tag{5.7}$$