6 Convolution

6.1 Convolution des fonctions régulières

Soit $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Alors la convolution de f et g est définie par la relation

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(y) f(x-y)\, dy.$$

C'est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} |(f * g)(x)|\, dx \leq \iint_{\mathbb{R}^2} |g(y) f(x-y)|\, dy dx = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1},$$

où on a utilisé le théorème de Fubini. De plus, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned}
(f * g, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left\{ \int_{\mathbb{R}} g(y) f(x-y)\, dy \right\} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(y) \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \varphi(x)\, dx \right\} dy \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x) g(y) \varphi(x+y)\, dy dx.
\end{aligned}$$

Si $\operatorname{supp} g$ (ou $\operatorname{supp} f$) est compact et $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifie $\chi g = g$, alors

$$(f * g, \varphi) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x) g(y) \chi(y) \varphi(x+y)\, dy dx.$$

C'est la définition de convolution pour les distributions.

6.2 Définition et propriétés de la convolution des distributions

Définition 6.1. Soit $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\operatorname{supp} g \Subset \mathbb{R}$. On définit la convolution de f et g par la relation

$$(f * g, \varphi) = \big(f(x) \otimes g(y), \chi(y) \varphi(x+y)\big) \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \tag{6.1}$$

où $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est une fonction égale à 1 sur $\operatorname{supp} g$. De même, si $\operatorname{supp} f \Subset \mathbb{R}$, alors

$$(f * g, \varphi) = \big(f(x) \otimes g(y), \chi(x) \varphi(x+y)\big) \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \tag{6.2}$$

où $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est une fonction égale à 1 sur $\operatorname{supp} f$.

Proposition 6.2. *La convolution est bien définie. De plus, si $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\operatorname{supp} g \Subset \mathbb{R}$ (ou $\operatorname{supp} f \Subset \mathbb{R}$), alors*

$$f * g = g * f. \tag{6.3}$$

Démonstration. Si $\chi, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $\chi(y)\varphi(x+y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, et on peut considérer $(f(x) \otimes g(y), \chi(y)\varphi(x+y))$. De plus, si $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors la suite $\chi(y)\varphi_n(x+y)$ converge vers $\chi(y)\varphi(x+y)$ dans l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Donc, la formule (6.1) définit une distribution sur $\mathbb{R}$. Si $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sont deux fonctions testes égales à 1 dans un voisinage de $\operatorname{supp} g$, alors $(\chi_1 - \chi_2)g = 0$, et on voit que la valeur du membre de droite dans (6.1) ne dépend pas de χ. ceci montre que la convolution est bien définie. Les mêmes argument prouvent que si $\operatorname{supp} f \Subset \mathbb{R}$, alors le membre de droite dans (6.2) définit une distribution qui ne dépend pas du choix de χ.

Montrons maintenant la relation (6.3). Supposons que $\operatorname{supp} g \Subset \mathbb{R}$. Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}(f * g, \varphi) &= \big(f(x) \otimes g(y), \chi(y)\varphi(x+y)\big)\\ &= \big(g(y) \otimes f(x), \chi(y)\varphi(x+y)\big) = (g * f, \varphi).\end{aligned}$$

□

Proposition 6.3. (a) Continuité : *si* $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} g \Subset \mathbb{R}$ *et la suite* $\{f_k\} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *converge vers* f *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, *alors*

$$f_k * g \to f * g \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

De même, si $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, *la suite* $\{g_k\} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *converge vers* g *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *et* $\operatorname{supp} g_k \subset B_R$ *pour une constante* R, *alors*

$$f * g_k \to f * g \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

(b) Dérivation : *si* $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} g \Subset \mathbb{R}$, *alors*

$$\partial_x^j (f * g) = (\partial_x^j f) * g) = f * (\partial_x^j g).$$

Ce résultat est une conséquence simple de la définition et du théorème 5.4.

Exemples 6.4. (a) Pour tout distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on a $\delta * f = f * \delta = f$.

(b) Soit θ la fonction de Heaviside. Alors

$$\begin{aligned}(\partial_x \theta) * 1 &= \delta * 1 = 1,\\ \theta * (\partial_x 1) &= \theta * 0 = 0.\end{aligned}$$

On voit que $(\partial_x \theta) * 1 \neq \theta * (\partial_x 1)$. Mais il n'y a pas de contradiction, parce que la convolution $\theta * 1$ n'est pas définie.

6.3 Régularisation des distributions

Proposition 6.5. *Soit* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *et* $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. *Alors* $f * \psi \in C^\infty$ *et*

$$(f * \psi)(x) = \big(f(y), \psi(x-y)\big).$$

Démonstration. En utilisant la définition de la convolution et la relation (5.7), pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on obtient

$$\begin{aligned}(f * \psi, \varphi) &= \big(f(x) \otimes \psi(y), \chi(y)\varphi(x+y)\big)\\ &= \big(f(x), (\psi(y), \chi(y)\varphi(x+y))\big)\\ &= \Big(f(x), \int_{\mathbb{R}} \psi(y)\varphi(x+y)\, dy\Big)\\ &= \Big(f(x), \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\psi(y-x)\, dy\Big)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)(f(x), \psi(y-x))\, dy,\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Exemple 6.6. Soit $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction vérifiant les conditions

$$\omega \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \omega(x)\, dx = 1.$$

On pose $\omega_n(x) = n\omega(nx)$. Alors, d'après la proposition 6.5, la fonction $f * \omega_n$ appartient à l'espace $C^\infty(\mathbb{R})$. D'autre part, selon l'exemple 2.8 (i), on a

$$\omega_n \to \delta \quad \text{dans l'espace } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

La continuité de la convolution (voir la proposition 6.3) entraîne que

$$f * \omega_n \to f * \delta = f. \tag{6.4}$$

Donc, toute distribution peut être approchée par une suite des fonction régilières.

Théorème 6.7. *Toute distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de fonctions régulières $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit $\eta_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une suite telle que $\eta_n(x) = 1$ pour $|x| \leq n$. On pose

$$g_n(x) = \eta_n(x)(f * \omega_n)(x).$$

En utilisant la convergence (6.4), il est facile à montrer que $g_n \to f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. □