7 Distributions tempérées

7.1 L'espace de Schwartz

On note $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des fonctions $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telles que

$$|\varphi^{(j)}(x)| \le C_{mj}(1+|x|)^{-m} \quad \text{pour tout } m, j \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{R},$$

où $C_{mj} > 0$ est une constante. Soit

$$p_{mj}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \big(|\varphi^{(j)}(x)|(1+|x|)^m\big), \quad m, j \ge \mathbb{Z}_+.$$

On dit qu'une suite $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{S}$ converge vers $\varphi \in \mathcal{S}$ si

$$p_{mj}(\varphi_k - \varphi) \to 0 \quad \text{pour tout } m, j \ge \mathbb{Z}_+.$$

Soit

$$d(\varphi, \psi) := \sum_{m,j\ge 0} 2^{-(m+j)} \frac{p_{mj}(\varphi - \psi)}{1 + p_{mj}(\varphi - \psi)}.$$

Lemme 7.1. *Le suite $\{\varphi_k\}$ converge vers φ ssi*

$$d(\varphi_k, \varphi) \to 0 \quad \textit{quand } k \to \infty. \tag{7.1}$$

Démonstration. Supposons que $\varphi_k \to \varphi$ dans $\mathcal{S}$. Soit $\varepsilon > 0$ une constante quelconque. Alors pour tout entier $N \ge 1$ il existe $K = K(N, \varepsilon) \ge 1$ tel que

$$p_{mj}(\varphi_k - \varphi) \le \varepsilon \quad \text{pour } 0 \le m, j \le N \text{ et } k \ge K. \tag{7.2}$$

On a

$$\begin{aligned} d(\varphi_k, \varphi) &\le \sum_{0\le m,j\le N} 2^{-(m+j)} \frac{p_{mj}(\varphi_k - \varphi)}{1 + p_{mj}(\varphi_k - \varphi)} + \sum{}' 2^{-(m+j)} \frac{p_{mj}(\varphi_k - \varphi)}{1 + p_{mj}(\varphi_k - \varphi)} \\ &\le \varepsilon \sum_{0\le m,j\le N} 2^{-(m+j)} + \sum{}' 2^{-(m+j)} \le 4\varepsilon + 2^{2-N}. \end{aligned}$$

En choisissant $N = N_\varepsilon \ge 1$ suffisamment grand, on obtient

$$d(\varphi_k, \varphi) \le 5\varepsilon \quad \text{pour } k \ge K(\varepsilon, N_\varepsilon).$$

Réciproquement, si la convergence (7.1) a lieu, alors pour tout $m, j \ge 0$

$$\frac{p_{mj}(\varphi_k - \varphi)}{1 + p_{mj}(\varphi_k - \varphi)} \to 0 \quad \text{quand } k \to \infty,$$

d'où on conclut que $p_{mj}(\varphi_k - \varphi) \to 0$ quand $k \to \infty$. □

Lemme 7.2. *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}$, c'est-à-dire, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$ il existe une suite $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui convegre vers φ dans $\mathcal{S}$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{S}$ et $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction telle que $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$. Il est facile à vérifier que la suite $\varphi_k(x) = \chi(x/k)\varphi(x)$ converge vers φ dans $\mathcal{S}$. □

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la définition de l'espace $\mathcal{S}$ et de sa topologie.

Proposition 7.3. **(i)** *La dérivation $\varphi \mapsto \varphi^{(j)}$ est continue dans $\mathcal{S}$ pour tout entier $j \geq 1$.*

(ii) *Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors l'application $\varphi \mapsto \varphi(ax+b)$ est continue dans $\mathcal{S}$.*

(iii) *Soit $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction telle que*

$$|a^{(j)}(x)| \leq C_j(1+|x|)^{m_j}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7.3}$$

où C_j et m_j sont des constantes. Alors la multiplication $\varphi \mapsto a\varphi$ est continue dans $\mathcal{S}$.

7.2 L'espace des distributions tempérées

Définition 7.4. Soit $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonctionnelle linéaire. On dit que f est une *distribution tempérée* si f est continue pour la topologie de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire, si $\varphi_k \to 0$ dans $\mathcal{S}$, alors $f(\varphi_k) \to f(\varphi)$. On note $\mathcal{S}'$ l'espace des distributions tempérées.

Définition 7.5. On dit que la *suite $\{f_k\} \subset \mathcal{S}'$ converge vers f dans $\mathcal{S}'$* si

$$f_k(\varphi) \to f(\varphi) \quad \text{quand } k \to \infty \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Il est claire que $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et cette injection est continue.

Théorème 7.6. *Une fontionnelle linéaire $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{S}$ ssi il existe un entier $p \geq 0$ et une constnte $C > 0$ tels que*

$$|f(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_p, \tag{7.4}$$

où

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x\in\mathbb{R}}\left\{(1+|x|)^p \sum_{j=0}^{p} |\varphi^{(j)}(x)|\right\}.$$

La démonstration de ce résultat est analogue à celle de la proposition 2.3.

Corollaire 7.7. *Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution vérifiant* (7.4) *pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors f admet un unique prolongement continu sur $\mathcal{S}$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{S}$ et $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une suite telle que $\varphi_k \to \varphi$ dans $\mathcal{S}$. Alors l'inégalité (7.4) implique que

$$|(f, \varphi_k - \varphi_n)| \leq C\, \|\varphi_k - \varphi_n\|_p \to 0 \quad \text{quand } k, n \to \infty.$$

Donc, la suite (f, φ_k) converge. On définit une fonctionnelle $\tilde{f} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ par

$$(f, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (f, \varphi_k) \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{S},$$

où $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est une suite quelconque convergeant vers φ. Il est facile à vérifier que $\tilde{f} \in \mathcal{S}'$ et que la restriction de $\tilde{f}$ à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est confondue avec f. □

Exemples 7.8. **(a)** Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|(1 + |x|)^{-m} dx < \infty,$$

où $m \geq 0$. Alors $f \in \mathcal{S}'$. Remarquons que $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{S}'$. Par example, $e^x \notin \mathcal{S}'$.

(b) Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{supp} f \Subset \mathbb{R}$. Alors $f \in \mathcal{S}'$. Plus précisement, on peut construire $\tilde{f} \in \mathcal{S}'$ tel que $\tilde{f}|_{\mathcal{D}(\mathbb{R})} = f$. De plus, une telle distribution tempérée est unique.

Proposition 7.9. **(i)** *Soit $f \in \mathcal{S}'$. Alors $f^{(j)} \in \mathcal{S}'$ pour tout $j \geq 0$.*

(ii) *Soit $f \in \mathcal{S}'$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, alors $f(ax + b) \in \mathcal{S}'$.*

(iii) *Soit $f \in \mathcal{S}'$ et $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction vérifiant* (7.3)*. Alors $af \in \mathcal{S}'$.*

Démonstration. Nous allons établir seulement la propriété (i). La démonstration de (ii) et (iii) est analogue.

D'après le théorème 7.6, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$|(f^{(j)}, \varphi)| = |(f, \varphi^{(j)})| \leq C_p \|\varphi^{(j)}\|_p \leq C_p \|\varphi\|_{p+j}.$$

En appliquant le corollaire 7.7, on conclut que $f^{(j)} \in \mathcal{S}'$. □

7.3 Convolution des distributions tempérées

Théorème 7.10. *Soit $f, g \in \mathcal{S}'$ et $\operatorname{supp} g \Subset \mathbb{R}$. Alors $f * g \in \mathcal{S}'$ et*

$$(f * g, \varphi) = \big(f(x), (g(y), \eta(y)\varphi(x + y))\big) \quad \textit{pour tout } \varphi \in \mathcal{S}, \tag{7.5}$$

où $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est une fonction égale à 1 dans un voisinage de $\operatorname{supp} g$.

Démonstration. D'après le corollaire 7.7, il suffit de montrer que

$$|(f * g, \varphi)| \leq C_p \|\varphi\|_p \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{S}, \tag{7.6}$$

où $f * g$ désigne la fonctionnelle définie par le membre de droite dans (7.5).

Soit $\psi(x) = (g(y), \chi(y)\varphi(x+y))$ et $\operatorname{supp}\chi \subset [-R, R]$. Alors $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et

$$\psi^{(j)}(x) = (g(y), \chi(y)\varphi^{(j)}(x+y)).$$

Comme $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, il existe une constante $C > 0$ et un entier $m \geq 0$ tels que

$$|\psi^{(j)}(x)| \leq C\,\|\chi(y)\varphi^{(j)}(x+\cdot)\|_{C^m(\mathbb{R})},$$

d'où on conclut que

$$\|\psi\|_p \leq C_{R,p}\|\varphi\|_{p+m} \quad \text{pour tout } p \geq 0.$$

Comme $f \in \mathcal{S}'$, on voit que

$$|(f * g, \varphi)| = |(f, \psi)| \leq C\,\|\psi\|_p \leq C'\|\varphi\|_{p+m}.$$

$\square$