8 Transformation de Fourier

8.1 Transformation de Fourier sur l'espace de Schwartz

Pour $\varphi \in \mathcal{S}$, on définit la transformation de Fourier par la relation

$$F(\varphi)(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \varphi(x)\, dx.$$

Théorème 8.1. *Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, la fonction $\hat{\varphi}$ appartient à $\mathcal{S}$. De plus, l'opérateur linéaire $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est continue et vérifie les relations*

$$F(\varphi^{(j)})(\xi) = (i\xi)^j F(\varphi)(\xi), \quad F(x^j \varphi)(\xi) = (i\partial_\xi)^j F(\varphi)(\xi), \tag{8.1}$$

$$F(\varphi(x-b))(\xi) = e^{-i\xi b} F(\varphi)(\xi), \quad F(e^{ixb}\varphi)(\xi) = F(\varphi)(\xi - b), \tag{8.2}$$

$$F(f * g) = (2\pi)^{1/2} F(f)F(g) \tag{8.3}$$

pour tout $b \in \mathbb{R}$ et $j \geq 0$.

Démonstration. En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
F(\varphi^{(j)})(\xi) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \varphi^{(j)}(x)\, dx = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (-\partial_x)^j e^{-ix\xi} \varphi(x)\, dx \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (i\xi)^j e^{-ix\xi} \varphi(x)\, dx, \\
F(x^j\varphi)(\xi) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} x^j e^{-ix\xi} \varphi(x)\, dx = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (i\partial_\xi)^j e^{-ix\xi} \varphi(x)\, dx \\
&= (i\partial_\xi)^j F(\varphi)(\xi).
\end{aligned}$$

Les relations (8.1) entraînent que $F(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ et que l'opérateur F est continu. La démonstration de (8.2) est encore plus facile (exercice). On établit maintenant (8.3) :

$$\begin{aligned}
F(f * g)(\xi) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y)\, dy\, dx \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} g(x-y)\, dx\, dy \\
&= F(g)(\xi) \int_{\mathbb{R}} e^{-iy\xi} f(y)\, dy = (2\pi)^{1/2} F(f)F(g).
\end{aligned}$$

□

On définit la transformation inverse de Fourier par

$$F^{-1}(\varphi)(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Théorème 8.2. *L'opérateur $F^{-1} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est continu. De plus,*

$$F^{-1} \circ F = F \circ F^{-1} = \mathrm{Id}, \tag{8.4}$$

$$F^{-1} = F \circ S, \quad F \circ F = S, \tag{8.5}$$

où $(S\varphi)(x) = \varphi(-x)$.

Démonstration. La première relation de (8.5) est évidente, et la deuxième relation est conséquence de (8.4). De plus, la continuité de F^{-1} se démontre facilement en utilisant (8.5) et la continuté des applications F et S. Montrons maintenant la première formule d'inversion (8.4). On a pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}(F^{-1} \circ F)(\varphi)(x) &= \lim_{R\to\infty} (2\pi)^{-1} \int_{-R}^{R} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi} \varphi(y)\, dy d\xi \\ &= \lim_{R\to\infty} (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-R}^{R} e^{i(x-y)\xi} d\xi \right) \varphi(y)\, dy \\ &= \lim_{R\to\infty} \pi^{-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(R(x-y))}{x-y} \varphi(y)\, dy. \end{aligned} \tag{8.6}$$

En utilisant l'exercice 2.8 (ii), on conclut que le membre de droite dans (8.6) est égal à $\varphi(x)$. La démonstration de la deuxième formule (8.4) est similaire. □

Corollaire 8.3. *L'opérateur $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est un isomorphisme.*

Exercice 8.4. Montrer que si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} F(\varphi_1)(\xi)\varphi_2(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(x) F(\varphi_2)(x)\, dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}} F^{-1}(\varphi_1)(\xi)\varphi_2(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(x) F^{-1}(\varphi_2)(x)\, dx.$$

8.2 Transformation de Fourier des distributions tempérées

Définition 8.5. On définit *la transformation de Fourier F sur $\mathcal{S}'$* comme l'operateur adjoint de $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, c'est-à-dire,

$$(F(f), \varphi) = (f, F(\varphi)) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{S}.$$

De même, l'opérateur adjoint de $F^{-1} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est appelé *la transformation inverse de Fourier sur $\mathcal{S}'$*:

$$(F^{-1}(f), \varphi) = (f, F^{-1}(\varphi)) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Théorème 8.6. *La transformation de Fourier $F : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ est un isomorphisme, et son inverse est donné par F^{-1}. De plus, on a les relations* (8.1), (8.2), (8.4), (8.5).

8.3 La cas des distributions à support compact

Théorème 8.7. *Soit* $f \in \mathcal{S}'$, $\operatorname{supp} f \Subset \mathbb{R}$. *Alors* $F(f) \in C^\infty$ *et*

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\big(f(x), \eta(x)e^{-ix\xi}\big), \tag{8.7}$$

où $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *est égale à* 1 *dans un voisinage de* $\operatorname{supp} f$. *De plus, il existe* $m, C > 0$ *tels que*

$$|\hat{f}(\xi)| \le C(1+|\xi|)^m, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8.8. Montrer que si $f \in \mathcal{S}'$, $\operatorname{supp} f \Subset \mathbb{R}$, alors il existe un entier $m \ge 0$ tel que pour tout $j \ge 0$

$$|\hat{f}^{(j)}(\xi)| \le C_j(1+|\xi|)^{m+j}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Exemples 8.9. On a les relations suivantes:

$$\begin{gathered} F(\delta)(\xi) = (2\pi)^{-1/2}, \quad F(\delta(x-b))(\xi) = (2\pi)^{-1/2}e^{-i\xi b}, \\ F(1) = (2\pi)^{1/2}F(F(\delta)) = (2\pi)^{1/2}\delta(-x) = (2\pi)^{1/2}\delta, \\ F(\delta^{(j)})(\xi) = (i\xi)^j F(\delta) = (2\pi)^{-1/2}(i\xi)^j, \\ F(x^j)(\xi) = (2\pi)^{1/2}(-i)^j F(F(\delta^{(j)})) = (2\pi)^{1/2} i^j \delta. \end{gathered}$$

8.4 Transformation de Fourier de la convolution

Théorème 8.10. *Soit* $f, g \in \mathcal{S}'$, $\operatorname{supp} g \Subset \mathbb{R}$. *Alors la relation* (8.3) *a lieu.*

Exemples 8.11. (a) $F(\theta(R-|x|)) = \big(\frac{2}{\pi}\big)^{1/2}\frac{\sin(R\xi)}{\xi}$.
(b) $F(\theta) = (2\pi)^{-1/2}\big(\pi\delta(\xi) - i\,\text{v.p.}\,\frac{1}{\xi}\big)$.