9 Équations différentielles ordinaires

9.1 Solution fondamentale

Considérons un opérateur différentiel d'ordre m :

$$L = \frac{d^m}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_m, \quad a_j \in \mathbb{C}.$$

Définition 9.1. On dit que la distribution $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une solution fondamentale pour L si $L\mathcal{E} = \delta(x)$.

Théorème 9.2. *Tout opérateur différentiel possède une solution fondamentale. De plus, toute solution fondamental est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Lemme 9.3. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de l'équation*

$$Lu = 0. \tag{9.1}$$

Alors $u \in C^\infty(\mathbb{R})$. De plus, si

$$u(x_0) = u'(x_0) = \cdots = u^{(m-1)}(x_0) = 0,$$

où $x_0 \in I$, alors $u \equiv 0$.

9.2 Problème de Cauchy pour l'équation non homogène

Considérons le problème

$$Lu = f, \tag{9.2}$$

$$u(0) = u_0, \quad \ldots, \quad u^{(m-1)}(0) = u_{m-1}, \tag{9.3}$$

où $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, supp $\in \mathbb{R}_+$, $u_j \in \mathbb{C}$. Comme on cherche une solution dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, il faut donner un sens aux conditions initiales (9.3).

Si $f \in C(\mathbb{R}_+)$ et $u \in C^m(\mathbb{R}_+)$ est une solution du problème (9.2), (9.3), alors la fonction

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

vérifie l'équation

$$Lu = \tilde{f}, \quad \tilde{f}(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \Bigg(\sum_{k=1}^{m-j} a_{k-1} u_{m-k} \Bigg) \delta^{(j-1)}(x), \tag{9.4}$$

où $a_0 = 1$. Réciproquement, si $u(x)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $u \in C^m(\mathbb{R}_+)$, $u(x) = 0$ pour $x < 0$ et u vérifie (9.4), alors la restriction de u à $\mathbb{R}_+$ est l'unique solution du problème (9.2), (9.3).

Définition 9.4. On dit que la distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une solution du problème (9.2), (9.3) sur $\mathbb{R}_+$ si $u(x) = 0$ pour $x < 0$ et la relation (9.4) a lieu.

Théorème 9.5. *Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution telle* supp $f \Subset \mathbb{R}_+$. *Alors le problème* (9.2), (9.3) *possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.*