1 Opérateurs bornés et équations différentielles dans un espace de Banach

1.1 Espace d'opérateurs bornés et ses topologies

Soient X, Y deux espaces de Banach. On note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans Y. Rappelons que la norme de $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ est définie par

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Ax\|_Y \,.$$

Dans le cas $X = Y$, on écrit $\mathcal{L}(X)$ au lieu de $\mathcal{L}(X,X)$.

On définit trois topologies sur l'espace $\mathcal{L}(X,Y)$: topologies uniforme, forte et faible.

Définition 1.1. Soient $A, A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$. On dit que la suite $\{A_n\}$ converge vers A dans la topologie uniforme, forte ou faible si

$$\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty, \qquad \text{(uniforme)}$$

$$A_n x \to Ax \quad \text{quand } n \to \infty \text{ pour tout } x \in X, \qquad \text{(forte)}$$

$$\ell(A_n x) \to \ell(Ax) \quad \text{quand } n \to \infty \text{ pour tout } x \in X \text{ et } \ell \in Y^*, \qquad \text{(faible)}$$

où Y^* désigne l'espace dual de Y. Dans ce cas, on écrit

$$A_n \to A, \quad A_n \overset{s}{\to} A, \quad A_n \overset{w}{\to} A \,.$$

Exercice 1.2. Soit $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ une suite de Cauchy. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tel que $A_n \to A$, c'est-à-dire, $\mathcal{L}(X,Y)$ est complet pour la topologie uniforme.

Le résultat suivant montre que si Y est un espace réflexif ($Y^{**} = Y$), alors $\mathcal{L}(X,Y)$ est complet aussi pour la topologie faible.

Proposition 1.3. *Soit X un espace de Banach, Y un espace de Banach réflexif et $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ une suite telle que $\ell(A_n x)$ converge pour tout $x \in X$ et $\ell \in Y^*$. Alors il existe $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tel que $A_n \overset{w}{\to} A$ quand $n \to \infty$.*

Démonstration. Montrons d'abord que

$$\sup_{n \ge 1} \|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty. \tag{1.1}$$

En effet, pour tout $n \ge 1$ et $x \in X$, on peut considérer $A_n x$ comme un élément de $\mathcal{L}(Y^*, \mathbb{C})$. Comme la suite $\ell(A_n x)$ est convergente, on a

$$\sup_{n \ge 1} |\ell(A_n x)| < \infty.$$

Le théorème de Banach–Steinhaus implique que

$$\sup_{n \ge 1} \|A_n x\|_{\mathcal{L}(Y^*, \mathbb{C})} = \sup_{n \ge 1} \|A_n x\|_Y < \infty.$$

Une deuxième application du théorème de Banach–Steinhaus donne (1.1).

On définit maintenant une forme bilinéaire $B : X \times Y^* \to \mathbb{C}$ par

$$B(x,\ell) = \lim_{n\to\infty} \ell(A_n x).$$

L'inégalité (1.1) entraîne que

$$|B(x,\ell)| \le C\|x\|_X \|\ell\|_{Y^*},$$

où la constante $C > 0$ ne dépend pas de $x \in X$ et $\ell \in Y^*$. Donc, $B(x,\cdot)$ est une forme linéaire sur Y^*. Comme $Y^{**} = Y$, on peut considérer $B(x,\cdot)$ comme un élément de Y. On définit $A : X \to Y$ par $Ax = B(x,\cdot)$. Il est facile à vérifier que $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ et $A_n \overset{w}{\to} A$. $\square$

Exercice 1.4. Soient X, Y deux espaces de Banach et $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ une suite telle que $A_n x$ converge pour tout $x \in X$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tel que $A_n \overset{s}{\to} A$ quand $n \to \infty$.

1.2 Opérateurs auto-adjoints et théorème spectral

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ et soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est dans *l'ensemble résolvant de* A, noté $\rho(A)$, si l'application $\lambda I - A : H \to H$ est une bijection et son inverse est borné. Si $\lambda \in \rho(A)$, alors on note $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$. L'ensemble $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ s'appelle *spectre* de A.

Théorème 1.5. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors $\rho(A)$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{C}$, et on a*

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda) R_\lambda(A) R_\mu(A) \quad \textit{pour } \lambda,\mu \in \rho(A). \tag{1.2}$$

De plus,

$$\big\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}\big\} \subset \rho(A).$$

Démonstration. Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$. Alors, pour $|\lambda - \lambda_0| \ll 1$, on a

$$\begin{aligned}
(\lambda I - A)^{-1} &= ((\lambda_0 I - A) - (\lambda_0 - \lambda) I)^{-1} \\
&= (\lambda_0 I - A)^{-1} (I - (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1})^{-1} \\
&= (\lambda_0 I - A)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k (\lambda_0 I - A)^{-k}.
\end{aligned}$$

Donc, $\lambda \in \rho(A)$ pour $|\lambda - \lambda_0| \ll 1$. De même, si $|\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$, alors

$$(\lambda I - A)^{-1} = \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}A)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A^k.$$

d'où on conclut que $\lambda \in \rho(A)$. Enfin, pour $\lambda, \mu \in \rho(A)$, on a

$$\begin{aligned}
R_\lambda(A) - R_\mu(A) &= (\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} \\
&= (\lambda I - A)^{-1} (\mu I - A - (\lambda I - A))(\mu I - A)^{-1} \\
&= (\mu - \lambda) R_\lambda(A) R_\mu(A).
\end{aligned}$$

$\square$

Reparquons que le théorème ci-dessus reste vrai pour les opérateurs dans un espace de Banach.

On introduit maintenant la notion d'opérateur adjoint. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et $v \in H$. Considérons la forme linéaire

$$\ell(u) = (Au, v), \quad u \in H.$$

Comme ℓ est continue, d'après le théorème de Riesz, il existe un unique $f \in H$ tel que $\ell(u) = (u, f)$ pour tout $u \in H$. Dans la suite, on note $f = A^*v$.

Exercice 1.6. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que $A^* \in \mathcal{L}(H)$ et

$$(Au, v) = (u, A^*v) \quad \text{pour tous } u, v \in H.$$

De plus, on a les propriétés suivantes :

(i) $(AB)^* = B^*A^*$, $(A^*)^* = A$.

(ii) Si A est inversible, alors A^* l'est aussi, et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

(iii) $\|A^*A\|_{\mathcal{L}(H)} = \|A\|^2_{\mathcal{L}(H)}$.

Définition 1.7. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On appelle A^* *l'opérateur adjoint de* A. L'opérateur A est dit *auto-adjoint* si $A^* = A$.

Il est claire que l'opérateur A est auto-adjoint si et seulement si

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \text{pour tous } u, v \in H.$$

Exercice 1.8. Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré, $H = L^2(X, \mu)$ l'espace des fonctions de carré intégrable à valeurs complexes, et $a \in L^\infty(X, \mu)$. On note $A : H \to H$ l'opérateur de multiplication par a. Montrer que $A^* = A$ si et seulement si a est une fonction réelle.

Le *théorème spectral* énoncé ci-dessous montre que tout opérateur auto-adjoint peut être réaliser comme un opérateur de multiplication.

Théorème 1.9. *Soit A un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert H. Alors il existe un espace mesuré $(X, \mathcal{B}, \mu)$, une isométrie $U : H \to L^2(X, \mu)$ et une fonction $a \in L^\infty(X, \mu)$ tels que, pour tout $f \in L^2(X, \mu)$,*

$$(UAU^{-1}f)(m) = a(m)f(m) \quad \mu\text{-presque partout.}$$

Pour une démonstration simple et complète de ce résultat, voir le chapitre 7 du livre [RS80]. Dans le § 4, nous démontrerons l'analogue de ce théorème dans le cas des opérateurs auto-adjoints non bornés.

1.3 Equations d'évolution linéaires

Soit X un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(X)$. Considérons l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

où $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Toute fonction $x : \mathbb{R} \to X$ continûment différentiable sur $\mathbb{R}$ et vérfiant (1.3) s'appelle *solution* de l'équation (1.3).

Théorème 1.10. *Pour tout $x_0 \in X$ il existe une unique fonction $x \in C^1(\mathbb{R}, X)$ vérfiant l'équation* (1.3) *et la condition initiale*

$$x(0) = x_0. \tag{1.4}$$

Démonstration. Existence. On note e^{tA} l'opérateur défini par

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Il est facile à vérifier que pour tout $T > 0$ la série (1.5) et toutes ses dérivées convergent uniformément par rapport à $t \in [-T, T]$. Donc, la fonction $t \mapsto e^{tA}$ est bien définie et appartient à $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$. De plus,

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Cette relation implique que $x(t) = e^{tA}x_0$ est solution de l'équation (1.3). La vlidité de la condition initiale (1.4) est évidente.

Unicité. Montrons que si $x \in C^1(\mathbb{R}, X)$ vérifie (1.3), (1.4) avec $x_0 = 0$, alors $x \equiv 0$. En effet, il résulte de (1.3) que

$$x(t) = \int_0^t Ax(s)\, ds\,.$$

En prenant la norme, on obtient

$$\|x(t)\|_X \le \|A\|_{\mathcal{L}(X)} \left| \int_0^t \|x(s)\|_X ds \right|, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

L'application de l'inégalité de Gronwall montre que $x \equiv 0$. □

Exercice 1.11. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ et $f \in C(\mathbb{R}, X)$. Montrer que la fonction

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

est l'unique solution du problème

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \quad x(0) = x_0.$$