2 Opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert

2.1 Opérateurs non bornés: définitions et propriétés élémentaires

Soit H un espace de Hilbert et A un opérateur dans H, c'est-à-dire, une application linéaire définie sur un espace vectoriel $\mathcal{D}(A) \subset H$ à valeurs dans H. Dans la suite, on suppose que $\mathcal{D}(A)$ est dense dans H.

Exemple 2.1. Soit $H = L^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}(A) = \{u \in H : xu \in H\}$. On définit A par

$$(Au)(x) = xu(x) \quad \text{pour } u \in \mathcal{D}(A).$$

Alors A est un opérateur linéaire non borné avec un domaine de définition dense.

Le *graphe* d'un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \to H$ est un sous-espace vectoriel dans $H \times H$ défini par

$$\Gamma(A) = \big\{[u, f] \in H \times H : u \in \mathcal{D}(A), f = Au\big\}.$$

L'opérateur A est dit *fermé* si $\Gamma(A)$ est fermé dans l'espace $H \times H$ muni du produit scalaire

$$([u_1, u_2], [v_1, v_2]) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2)$$

et de la norme correspondante. Si A_1 est un autre opérateur dans H tel que $\Gamma(A) \subset \Gamma(A_1)$, alors A_1 est appelé *extension* de A. Dans ce cas, on écrit $A \subset A_1$. Il est claire que A_1 est une extension de A si et seulement si $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A_1)$ et $Au = A_1 u$ pour $u \in \mathcal{D}(A)$. L'opérateur A est dit *fermable* s'il existe une extension fermée de A.

Proposition 2.2. *Soit A un opérateur fermable. Alors il existe une extension $\bar{A}$ de A telle que $\bar{A} \subset A_1$ pour toute autre extension fermée A_1. De plus, $\Gamma(\bar{A}) = \overline{\Gamma(A)}$.*

Démonstration. Soit A_1 une extension fermée de A. Alors $\Gamma(A_1) \supset \Gamma(A)$ et donc $\Gamma(A_1) \supset \overline{\Gamma(A)}$. On conclut que $\overline{\Gamma(A)}$ ne contient pas d'éléments de la forme $[0, f]$ avec $f \neq 0$. On définit un opérateur B par

$$\mathcal{D}(B) = \{u \in H : \text{il existe } f \in H \text{ tel que } [u, f] \in \overline{\Gamma(A)}\}, \quad Bu = f,$$

où f est l'unique vecteur tel que $[u, f] \in \overline{\Gamma(A)}$. Il est évident que $\Gamma(B) = \overline{\Gamma(A)}$ et $\Gamma(B) \subset \Gamma(A_1)$ pour toute extension fermée A_1. Donc, $B = \bar{A}$. $\square$

Dans la suite, on appelle $\bar{A}$ la *fermeture de A*. Signalons qu'il existe des opérateurs qui ne sont pas fermables.

Définition 2.3. Soit A un opérateur fermé dans H. L'ensemble *résolvant* de A, noté $\rho(A)$, est constitué de tous les nombres $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que l'opérateur $\lambda I - A$ est une bijection de $\mathcal{D}(A)$ sur H avec un inverse borné. Si $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelé la *résolvante* de A au point λ. Le complémentaire de $\rho(A)$ dans $\mathbb{C}$, noté $\sigma(A)$, s'appelle le *spectre* de A.

Exercice 2.4. Montrer que si A est un opérateur fermé et $\lambda I - A$ est une bijection de $\mathcal{D}(A)$ sur H, alors $(\lambda I - A)^{-1}$ est continu. *Indication:* utiliser le théorème du graphe fermé; voir le théorème III.12 dans [RS80].

Théorème 2.5. *Soit A un opérateur fermé dans un espace de Hilbert H. Alors $\rho(A)$ est un ensemble ouvert, et la relation* (1.2) *a lieu.*

La démonstration de ce résultat est tout à fait analogue à celle du théorème 1.5 concernant le cas des opérateurs bornés.

2.2 Opérateurs symétriques et auto-adjoints

Définition 2.6. Soit A un opérateur dans un espace de Hilbert H. On note $\mathcal{D}(A^*)$ l'ensemble des vecteurs $v \in H$ pour lesquels il existe $f \in H$ tel que

$$(Au, v) = (u, f) \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}(A). \tag{2.1}$$

Pour tout $v \in \mathcal{D}(A^*)$ on pose $A^*v = f$, où f désigne le vecteur vérifiant (2.1). On appelle A^* l'opérateur *adjoint* de A.

Exercice 2.7. Montrer les propriétés suivantes:

(i) $u \in \mathcal{D}(A^*)$ si et seulement si $|(Au, v)| \le C\|v\|$ pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$;

(ii) si $A \subset B$, alors $A^* \subset B^*$.

Théorème 2.8. *Soit A un opérateur dans H. Alors les propriétés suivantes ont lieu:*

(i) *A^* est fermé.*

(ii) *A est fermable si et seulement si $\mathcal{D}(A^*)$ est dense, et dans ce cas $\bar{A} = A^{**}$.*

(iii) *Si A est fermable, alors $(\bar{A})^* = A^*$.*

Démonstration. **(i)** On définit un opérateur unitaire $V : H \times H \to H \times H$ par $V[u, v] = [-v, u]$. Il est facile à vérifier que $V(E^\perp) = V(E)^\perp$ pour tout sous-espace $E \subset H \times H$. La définition de l'opérateur adjoint implique que

$$\Gamma(A^*) = V\Gamma(A)^\perp. \tag{2.2}$$

Comme $V\Gamma(A)^\perp$ est toujours fermé, on conclut que A^* est fermé.

(ii) Supposons que $\mathcal{D}(A^*)$ est dense. Alors

$$\overline{\Gamma(A)} = \big(\Gamma(A)^\perp\big)^\perp = \big(V^2\Gamma(A)^\perp\big)^\perp = \big(V\Gamma(A^*)\big)^\perp = \Gamma(A^{**}), \tag{2.3}$$

où on a utilisé la relation (2.2). La proposition 2.2 implique que $\bar{A} = A^{**}$.

Réciproquement, si $\mathcal{D}(A^*)$ n'est pas dense dans H, alors il existe un vecteur $w \neq 0$ tel que $w \in \mathcal{D}(A^*)^\perp$. Dans ce cas, $[w, 0] \in \Gamma(A^*)^\perp$, d'où on voit que

$[0,w] \in V\Gamma(A^*)^\perp$. La relation (2.3) montre maintenant que $[0,w] \in \overline{\Gamma(A)}$, et donc A n'est pas fermable.

(iii) Si A est fermable, alors

$$A^* = \overline{A^*} = A^{***} = (\bar{A})^*.$$

□

Définition 2.9. Un opérateur A dans un espace de Hilbert est dit *symétrique* si $A \subset A^*$, c'est-à-dire,

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*), \qquad Au = A^*u \quad \text{pour } u \in \mathcal{D}(A).$$

Il est claire que A est symétrique si et seulement si

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \text{pour } u \in \mathcal{D}(A).$$

Un opérateur A est dit *auto-adjoint* si $A = A^*$

Exercice 2.10. Montrer les propriétés suivantes :

(i) Si A est symétrique, alors A fermable et $A \subset A^{**} \subset A^*$.

(ii) Si A est fermé et symétrique, alors $A = A^{**} \subset A^*$.

(iii) Si A est auto-adjoint, alors $A = A^{**} = A^*$.

Théorème 2.11. *Soit A un opérateur symétrique dans H. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *A est auto-adjoint.*

(ii) *A est fermé et* $\mathrm{Ker}(A^* \pm iI) = \{0\}$.

(iii) $\mathrm{Im}(A \pm iI) = H$.

Démonstration. **(i) ⇒ (ii)** Comme l'opérateur A est auto-adjoint, il est fermé. Si $A^*u = \pm iu$, alors $Au = \pm iu$ et $(Au, u) = \pm i(u, u)$. Comme (Au, u) est réel, on conclut que $u = 0$.

(ii) ⇒ (iii) Montrons d'abord que $\mathrm{Im}(A - i)$ est dense dans H. Supposons que $v \in \mathrm{Im}(A - i)^\perp$. Alors $((A - i)u, v) = 0$ pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$. Donc,

$$(Au, v) = (u, -iv) \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}(A),$$

d'où on voit que $v \in \mathcal{D}(A^*)$ et $A^*v = -iv$. Comme $\mathrm{Ker}(A^* + i) = \{0\}$, on conclut que $v = 0$.

Montrons maintenant que $\mathrm{Im}(A - i)$ est fermé. Soit $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ une suite telle que $(A - i)u_n \to g$. On veut montrer que $g \in \mathrm{Im}(A - i)$. Comme

$$\|(A - i)u\|^2 = \|Au\|^2 + \|u\|^2,$$

on voit que la suite $\{u_n\}$ converge vers un élément u et Au_n converge $g+iu$. En utilisnat le fait que A est fermé, on conclut que $u \in \mathcal{D}(A)$ et $Au = g+iu$. Donc, $(A-i)u = g$.

L'espace vectoriel $\operatorname{Im}(A-i)$ étant dense et fermé, il est confondu avec H. La démonstration de la relation $\operatorname{Im}(A+i) = H$ est analogue.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Il faut montrer que $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(A)$. Soit $u \in \mathcal{D}(A^*)$. Alors il existe $v \in \mathcal{D}(A)$ tel que $(A-i)v = (A^*-i)u$. Comme $A \subset A^*$, on voit que

$$(A^*-i)(u-v) = 0. \tag{2.4}$$

L'argument utilisé dans la démonstration de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) montre que si $\operatorname{Im}(A+i) = H$, alors $\operatorname{Ker}(A^*-i) = \{0\}$. Il résulte de (2.4) que $u = v \in \mathcal{D}(A)$. Donc, $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(A)$, et l'opérateur A est auto-adjoint. □

Définition 2.12. Soit A un opérateur symétrique. On dit que A est *essentiellement auto-adjoint* si sa fermeture est auto-adjoint.

Corollaire 2.13. *Soit A un opérateur symétrique dans H. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- **(i)** *A est essentiellement auto-adjoint.*
- **(ii)** $\operatorname{Ker}(A^* \pm iI) = \{0\}$.
- **(iii)** $\operatorname{Im}(A \pm iI)$ *est dense dans H.*

Exercice 2.14. Démontrer le corollaire.

Exemple 2.15. Considérons un opérateur A dans $L^2(0,1)$ défini par

$$\mathcal{D}(A) = H_0^1(0,1), \quad (Au)(x) = iu'(x)\,.$$

Il est facile à voir que $A \subset A^*$. Calculons A^*.

Montrons d'abord que si $v \in L^2(0,1)$ et

$$\int_0^1 \psi'(x)\bar{v}(x)\,dx = 0 \quad \text{pour tout } \psi \in C_0^\infty(0,1), \tag{2.5}$$

alors $v \equiv$ const. En effet, toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$ est représentable sous la forme

$$\varphi(x) = \psi'(x) + \left(\int_0^1 \varphi(y)\,dy\right)\varphi_0(x),$$

où $\varphi_0 \in C_0^\infty(0,1)$ est une fonction telle que $\int_0^1 \varphi_0 dx = 0$. Il résulte de (2.5) que

$$\int_0^1 \varphi\bar{v}\,dx = \int_0^1 \psi'\bar{v}\,dx + \int_0^1 \varphi\,dy \int_0^1 \varphi_0\bar{v}\,dx = c\int_0^1 \varphi\,dy\,, \tag{2.6}$$

où $c = \int_0^1 \varphi_0\bar{v}\,dx$. Comme (2.6) est vrai pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$, on conclut que $v \equiv \bar{c}$.

Supposons maintenant que $v \in \mathcal{D}(A^*)$. Alors il existe $f \in L^2(0,1)$ tel que

$$\int_0^1 i\varphi'\bar{v}\,dx = \int_0^1 \varphi\bar{f}\,dx \quad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(0,1).$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^1 i\varphi'\Big(i\bar{v} + \int_0^x \bar{f}(y)\,dy\Big)\,dx = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(0,1),$$

d'où on conclut que

$$v(x) = -i\int_0^x f(y)\,dy + C\,.$$

Donc, si $v \in \mathcal{D}(A^*)$, alors $v' \in L^2(0,1)$ et $A^*v = iv'$. Réciproquement, si $v \in H^1(0,1)$, alors

$$\int_0^1 iu'\bar{v}\,dx = -\int_0^1 iu\bar{v}'\,dx = \int_0^1 u\,\overline{iv'}\,dx.$$

Ainsi on a montré que $\mathcal{D}(A^*) = H^1(0,1)$ et $A^*v = iv'$.

L'opérateur A est fermé (exercice) et donc n'est pas essentiellement auto-adjoint. Y-a-t-il des extensions auto-adjointes de A ?

Exercice 2.16. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$. On définit A_α par

$$\mathcal{D}(A_\alpha) = \{u \in H_0^1(0,1) : u(0) = \alpha u(1)\}, \quad (A_\alpha u)(x) = iu'(x)\,.$$

Montrer que A_α est une extension auto-adjoint de A.

Proposition 2.17. **(a)** *Soit $A : D(A) \to H$ un opérateur auto-adjoint qui est une bijection sur son image dense dans H. Alors l'opérateur inverse A^{-1} est aussi auto-adjoint.*

(b) *Soit A un opérateur symétrique tel que $D(A) = H$. Alors $A = A^*$.*

(c) *Soit A un opérateur tel que $(Au, v) = (u, Av)$ pour tous $u, v \in \mathcal{D}(A)$ et $\mathrm{Im}(A + \lambda I) = H$ pour un réel λ. Alors le domaine de A est dense et $A = A^*$.*

Démonstration. **(a)** La formule (2.2) implique que $A = A^*$ si et seulement si $V\Gamma(A)^\perp = \Gamma(A)$. Introduisons l'opérateur $U : H \times H \to H \times H$ par la formule $U[u, v] = [u, v]$. Comme $\Gamma(A^{-1}) = U\Gamma(A)$, on on doit montrer que $V(U\Gamma(A))^\perp = U\Gamma(A)$. Cette relation est une conséquence immédiate d'auto-adjonction de A et l'égalité $UV = -VU$.

(b) On a $A \subset A^*$ et $\mathcal{D}(A) = H$, d'où on conclut que $A^* = A$.

(c) Comme $\mathrm{Im}(A + \lambda I) = H$, on a $\mathrm{Ker}(A + \lambda I) = \{0\}$, d'où on voit que l'opérateur $A + \lambda I$ est inversible. Son inverse est un opérateur symétrique défini partout, donc il est auto-adjoint. La relation

$$\mathcal{D}(A)^\perp = \big(\mathrm{Im}(A + \lambda I)^{-1}\big)^\perp = \mathrm{Ker}(\mathrm{Im}(A + \lambda I)^{-1} = \{0\}$$

implique que $\mathcal{D}(A)$ est dense dans H. D'après le point (a), l'opérateur $A + \lambda I$ est aussi auto-adjoint, ce que donne l'auto-adjonction de A. $\square$

2.3 Paire de Freidrichs

On décrit maintenant une approche générale qui permet de construire des opérateurs auto-adjoints. Soit H un espace de Hilbert et V un espace de Banach réflexif avec une injection dense et continue $V \subset H$. D'après le théorème de Riesz, on peut identifier H avec son dual H^*, et on a donc les injections continues $V \subset H = H^* \subset V^*$. On appelle (V, H) une *paire de Friedrichs*.

Lemme 2.18. *L'injection $H \subset V^*$ est dense.*

Démonstration. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualité entre $V = V^{**}$ et son dual V^*. Supposons qu'il existe $f : V^* \to \mathbb{C}$ tel que $\langle f, u \rangle = 0$ pour tout $u \in H$. Si on note ℓ_u l'élément de V^* défini par u, alors on peut écrire

$$\langle f, \ell_u \rangle = \langle \ell_u, v_f \rangle = (u, v_f) = 0 \quad \text{pour tout } u \in H,$$

où $v_f \in V$ est l'élément associé à f par l'isométrie $V^{**} \to V$. Il s'ensuit de la relation ci-dessus que $v_f = 0$ et dons $f = 0$. $\square$

Exemple 2.19. Soit $H = L^2(\mathbb{R})$ et $V = L^p(\mathbb{R}, \omega)$ l'espace de fonctions mesurable $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que

$$\|u\|^p_{L^p_\omega} := \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^p \omega(x)\, dx < \infty,$$

où $p \in]2, +\infty[$ et ω est une fonction positive telle que $\int \omega^{-2/(p-2)}(x)\, dx < \infty$. Alors (V, H) est une paire de Friedrichs, et on a $V^* = L^q(\mathbb{R}, \omega^{-q/p})$.

Soit $A : V \to V^*$ une application linéaire continue vérifiant la condition

$$\langle Au, v \rangle = \overline{\langle Av, u \rangle} \quad \text{pour tous } u, v \in V. \tag{2.7}$$

On définit un opérateur (non borné) dans H par la règle

$$\mathcal{D}(\hat{A}) = \{u \in V : Au \in H\}, \quad \hat{A}u = Au.$$

La relation (2.7) implique immédiatement que $(\hat{A}u, v) = (u, \hat{A}v)$, mais $\mathcal{D}(\hat{A})$ n'est pas dense dans le cas général, et on ne peut donc pas parler de la symétrie et de l'auto-adjonction de A. Le point (c) de la proposition 2.17 implique immédiatement le résultat suivant.

Proposition 2.20. *Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{Im}(\hat{A} + \lambda I) = H$. Alors le domaine de $\hat{A}$ est dense et $\hat{A} = \hat{A}^*$.*

Exemple 2.21. Soit V un espace de Hilbert et $A : V \to V^*$ un opérateur définie par la formule

$$(Au)(v) = (v, u)_V, \quad u, v \in V. \tag{2.8}$$

C'est une isométrie, car d'après le théorème de Riesz, l'image de A est confondue avec V^*, et pour tout $u \in V$ on a

$$\|Au\|_{V^*} = \sup_{\|v\|_V \le 1} |(Au)(v)| = \sup_{\|v\|_V \le 1} \big|(u, v)_V\big| = \|u\|_V.$$

Il s'ensuit que $\operatorname{Im} \hat{A} = H$, et l'opérateur $\hat{A}$ est auto-adjoint. On appelle $\hat{A}$ l'*opérateur auto-adjoint associé à la paire* (V, H).

2.4 Formes quadratiques et extension de Friedrichs

Soit $\mathcal{D} \subset H$ un sous-espace vectoriel dense et $Q : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une fonction hermitienne, c'est-à-dire,

$$Q(\alpha u + \beta v, w) = \alpha Q(u, w) + \beta Q(v, w) \quad \text{pour tous } u, v, w \in \mathcal{D},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$
$$Q(u, v) = \overline{Q(v, u)} \quad \text{pour tous } u, v \in \mathcal{D}.$$

Dans ce cas, on dit que Q est une *forme quadratique* avec le domaine $\mathcal{D}$ et on note $Q(u) = Q(u, u)$. Si Q_1 est une autre forme quadratique avec un domaine $\mathcal{D}_1$ telle que

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1, \quad Q(u, v) = Q_1(u, v) \quad \text{pour tous } u, v \in \mathcal{D},$$

alors Q_1 est appelé une *extension* de Q. Dans ce cas, on écrit $Q \subset Q_1$.

Exercice 2.22. Montrer qu'une forme quadratique est uniquement définie par ses valeurs sur la diagonale. Plus précisément,

$$Q(u, v) = \frac{1}{4}\big(Q(u + v) - Q(u - v) + iQ(u + iv) - iQ(u - iv)\big), \quad u, v \in \mathcal{D}.$$

Définition 2.23. Une forme quadratique est dite *semi-bornée inférieurement* (ou simplement *semi-bornée*) s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que

$$Q(u, u) \geq -M \|u\|^2 \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}. \tag{2.9}$$

Une forme quadratique semi-bornée Q est dite *fermée* si l'espace $\mathcal{D}$ est complet par rapport à la norme

$$\|u\|_Q = \big(Q(u) + (M + 1)\|u\|^2\big)^{1/2}.$$

Il est claire qu'une suite $\{u_n\} \subset \mathcal{D}$ converge vers un élément $u \in \mathcal{D}$ pour la norme $\| \cdot \|_Q$ si et seulement si $u_n \to u$ dans H et $Q(u_n - u) \to 0$.

Exercice 2.24. Une forme quadratique semi-bornée Q est fermée si et seulement si elle vérifie la propriété suivante:

(P) Soit $u \in H$ et $\{u_n\} \subset \mathcal{D}$ une suite telle que

$$\|u_n - u\| \to 0, \quad Q(u_n - u_m) \to 0 \quad \text{quand } m, n \to \infty. \tag{2.10}$$

Alors $u \in \mathcal{D}$ et $Q(u_n - u) \to 0$.

Proposition 2.25. *Soit Q une forme quadratique fermée avec un domaine $\mathcal{D}$. Alors $(\mathcal{D}, H)$ est une paire de Friedrichs.*

En particulier, on peut construire l'opérateur auto-adjoint associé à $(\mathcal{D}, H)$; voir l'exemple 2.21. Le reste de ce paragraphe est consacré à l'étude de formes quadratiques qui possèdent une extension fermée naturelle et auxquelles on peut associer un opérateur auto-adjoint.

Définition 2.26. La forme quadratique Q est dite *fermable* s'il existe une extension (semi-bornée) fermée de Q.

Proposition 2.27. *Soit Q une forme quadratique fermable vérifiant l'inégalité* (2.9)*. Alors il existe une extension fermée minimale de Q, et elle vérifie* (2.9)*.*

Démonstration. Soit Q_1 une extension fermée de Q définie sur $\mathcal{D}_1$. On note $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}_1$ l'adhérence de $\mathcal{D}$ pour la norme $\|\cdot\|_{Q_1}$ et $\overline{Q}$ la restriction de Q_1 à $\overline{\mathcal{D}}$. Par construction, un élément $u \in H$ appartient à $\overline{\mathcal{D}}$ si et seulement s'il existe une suite $\{u_n\} \subset \mathcal{D}$ vérifiant (2.10). L'exercice 2.24 implique que $\overline{Q}$ est fermée et que le domaine de définition de toute autre extension fermée contient $\overline{\mathcal{D}}$.

Montrons que $\overline{Q}(u) \geq -M\,\|u\|^2$ pour tout $u \in \overline{\mathcal{D}}$. En effet, soit $u \in \overline{\mathcal{D}}$. Alors il existe une suite $\{u_n\} \subset \mathcal{D}$ convergeant vers u pour la norme $\|\cdot\|_{\overline{Q}}$. Comme

$$\|u_n - u\| \leq \|u_n - u\|_{\overline{Q}}, \quad \big|\|u_n\|_{\overline{Q}} - \|u\|_{\overline{Q}}\big| \leq \|u_n - u\|_{\overline{Q}},$$

on voit que $\overline{Q}(u_n) = Q(u_n) \to \overline{Q}(u)$ quand $n \to \infty$. Il s'ensuit que

$$\overline{Q}(u) = \lim_{n\to\infty} Q(u_n) \geq -\lim_{n\to\infty} M\|u_n\|^2 = -M\|u\|^2.$$

□

La forme quadratique $\overline{Q}$ construite dans la Proposition 2.27 s'appelle la *fermeture* de Q.

Exemple 2.28. Soit $H = L^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R})$. On définit Q par

$$Q(u, v) = u(0)\bar{v}(0), \quad u, v \in \mathcal{D}.$$

Alors Q est une forme quadratique semi-bornée, mais Q n'est pas fermable. En effet, soit $\widehat{Q}$ une extension fermée de Q et $\{u_n\} \subset \mathcal{D}$ une suite telle que

$$u_n \to 0 \quad \text{dans } H, \qquad u_n(0) = 1 \quad \text{pout tout } n \geq 1.$$

L'exercice 2.24 implique que la suite $\{\widehat{Q}(u_n)\}$ doit converger vers $\widehat{Q}(0) = 0$. Comme ce n'est pas le cas, on conclut qu'il n'existe pas d'extension fermée de Q.

Chaque opérateur symétrique A définit une forme quadratique :

$$Q(u, v) = (Au, v), \quad u, v \in \mathcal{D}(A).$$

Proposition 2.29. *Soit Q une forme quadratique engendrée par un opérateur symétrique A tel que*

$$(Au, u) \geq -M\|u\|^2 \quad \textit{pour tout } u \in \mathcal{D}(A). \tag{2.11}$$

Alors Q est fermable et sa fermeture vérifie (2.9)*.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'inégalité (2.11) est vérifiée avec $M = -1$. Dans ce cas, $\|u\|_Q = (Au, u)^{1/2}$.

Soit $\mathcal{D}_1$ l'ensemble des vecteurs $u \in H$ pour lesquels il existe une suite $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ telle que

$$\|u_n - u\| \to 0, \quad \|u_n - u_m\|_Q \to 0 \quad \text{quand } m, n \to \infty. \tag{2.12}$$

Il est claire que $\mathcal{D}_1$ est un espace vectoriel. De plus, comme

$$\big|\|u_n\|_Q - \|u_m\|_Q\big| \le \|u_n - u_m\|_Q,$$

la suite $\|u_n\|_Q$ converge. Montrons que sa limite ne dépend que de l'élément u. En effet, soient $\{u_n\}, \{v_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ deux suites vérifiant (2.12). On pose $w_n = u_n - v_n$. Alors

$$\|w_n\| \to 0, \quad \|w_n - w_m\|_Q \to 0 \quad \text{quand } m, n \to \infty. \tag{2.13}$$

Comme

$$\|w_n - w_m\|_Q^2 = \|w_n\|_Q^2 + \|w_m\|_Q^2 - 2\,\mathrm{Re}(Aw_m, w_n),$$

on voit que

$$\|w_n\|_Q^2 + \|w_m\|_Q^2 \le \|w_n - w_m\|_Q^2 + 2\|Aw_m\|\,\|w_n\|\,. \tag{2.14}$$

Soit $\varepsilon > 0$ une constante quelconque et $m \ge 1$ un entier tellement grand que

$$\|w_n - w_m\|_Q \le \varepsilon \quad \text{pour } n \ge m. \tag{2.15}$$

Il résulte de (2.13) – (2.15) que

$$\limsup_{n\to\infty} \|w_n\|_Q^2 \le \varepsilon + 2\|Aw_m\| \limsup_{n\to\infty} \|w_n\| \le \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, on conclut que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_Q = \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_Q.$$

Ainsi, $\|\cdot\|_Q$ s'étend à $\mathcal{D}_1$. De plus, si $u \in \mathcal{D}_1$ et $\{u_n\}$ est une suite vérifiant (2.12), alors

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_Q = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \|u_n - u_m\|_Q = \lim_{m,n\to\infty} \|u_n - u_m\|_Q = 0. \tag{2.16}$$

On définit maintenant une forme quadratique sur $\mathcal{D}_1$ par

$$Q_1(u) = \lim_{n\to\infty} Q(u_n) = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_Q^2,$$

où $\{u_n\} \subset \mathcal{D}$ est une suite vérifiant (2.12). Il est claire que Q_1 est une extension semi-bornée de Q telle que $Q_1(u) \ge \|u\|^2$ pour tout $u \in \mathcal{D}_1$. Il nous reste à montrer que Q_1 est fermée.

Soit $\{u_n\} \subset \mathcal{D}_1$ une suite de Cauchy par rapport à la norme $\|\cdot\|_Q$. Alors il existe une suite $\{v_n\} \subset \mathcal{D}$ telle que

$$\|u_n - v_n\|_Q \le 2^{-n} \quad \text{pour tout } n \ge 1. \tag{2.17}$$

Alors

$$\lim_{n,m\to\infty} \|v_n - v_m\|_Q \le \lim_{n,m\to\infty} \big(2^{-m} + 2^{-n} + \|u_n - u_m\|_Q\big) = 0\,.$$

Donc, $\{v_n\}$ est une suite de Cauchy pour les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_Q$. Comme H est complet, il existe $u \in H$ tel que $v_n \to u$. La définiton de $\mathcal{D}_1$ entraîne que $u \in \mathcal{D}_1$. Il s'ensuit que $v_n \to u$ pour la norme $\|\cdot\|_Q$; voir (2.16). L'inégalité (2.17) implique que $u_n \to u$ pour la norme $\|\cdot\|_Q$, et donc $\mathcal{D}_1$ est complet. □

Le résultat suivant montre qu'une forme quadratique fermée est toujours engendrée par un opérateur auto-adjoint.

Théorème 2.30. *Soit Q une forme quadratique fermée semi-bornée définie sur un domaine $\mathcal{D}$. Alors il existe un unique opérateur auto-adjoint A tel que la fermeture de la forme (Au, v), $u, v \in \mathcal{D}(A)$, est confondue avec Q. Cet opérateur est donné par*

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(A) = \{u \in \mathcal{D} : \exists f \in H \ \textit{tel que}\ Q(u,v) = (f,v) \ \textit{pour tout}\ v \in \mathcal{D}\}, \\ &\quad Au = f \quad \textit{pour}\ u \in \mathcal{D}(A). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que Q vérifie (2.9) avec $M = 1$. Les espaces $V = \mathcal{D}(A)$ and H forment une paire de Friedrichs, et l'opérateur A défini par (2.18) est l'opérateur auto-adjoint associé à la paire (V, H); voir l'exemple 2.21. En particulier, l'image de A est confondue avec H. Il est claire que Q est une extension de la forme quadratique Q_A engendrée par A. Montrons que la fermeture de Q_A est confondue avec Q. Si ce n'est pas le cas, alors l'adhérence de $\mathcal{D}(A)$ pour la norme définie par Q est un sous-espace propre de $\mathcal{D}$. Donc, il existe $v \in \mathcal{D}$ tel que $Q(u, v) = (Au, v) = 0$ pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$. Il s'ensuit que l'image de A n'est pas confondue avec H. Cette contradiction termine la démonstration. □

La proposition 2.29 et le théorème 2.30 permettent de construire une extension auto-adjointe pour toute opérateur symétrique semi-borné A. En effet, d'après la proposition 2.29, la forme quadratique définie par A est fermable. Soit Q_1 sa fermeture et A_1 l'opérateur auto-adjoint construit dans le théorème 2.30. Alors les relations (2.18) impliquent que $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A_1)$ et la restriction de A_1 au sous-espace $\mathcal{D}(A)$ est confondue avec A. L'opérateur A_1 s'appelle l'*extension de Friedrichs* pour A.

Exemple 2.31. Considérons l'opérateur $A_0 = -\frac{d^2}{dx^2}$ dans l'espace $L^2(0,1)$ avec le domaine de définition $C_0^\infty(0,1)$. Alors A est un opérateur symétrique semi-borné. La fermeture Q de sa forme quadratique est donnée par

$$\mathcal{D}_Q = H^1(0,1), \quad Q(u,v) = \int_0^1 u\bar{v}\,dx.$$

Il est facile à vérifier que l'opérateur A construit dans le théorème 2.30 a la forme

$$\mathcal{D}(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1), \quad Au = -u''.$$

L'opérateur A est l'extension de Friedrichs de A_0.