3 Opérateurs auto-adjoints à spectre discret

3.1 Opérateurs auto-adjoint compacts

Soit H un espace de Hilbert complexe et $A \in \mathcal{L}(H)$. On note

$$r(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\} \tag{3.1}$$

le rayon spectral de A.

Lemme 3.1. *Pour tout opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$, on a*

$$r(A) = \limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}. \tag{3.2}$$

Démonstration. Supposons que $|\lambda| > \limsup \|A^n\|^{1/n}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \geq 1$ tels que

$$\|A^n\| \leq \big(|\lambda| - \varepsilon\big)^n \quad \text{pour } n \geq n_0$$

Il s'ensuit que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-1-n} A^n$$

converge. Il est facile à vérifier que la somme est l'inverse de $\lambda I - A$. Donc,

$$r(A) \leq \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Montrons l'inégalité réciproque. Pour tout $\varepsilon > 0$, on note Γ_ε le cercle de rayon $r(A) + \varepsilon$ et de centre zéro. Alors

$$A^n = (2\pi i)^{-1} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \lambda^n R_\lambda(A)\, d\lambda,$$

d'où on voit que

$$\|A^n\| \leq C_\varepsilon \big(r(A) + \varepsilon\big)^n \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Ceci entraîne que

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} C_\varepsilon^{1/n} \big(r(A) + \varepsilon\big) = r(A) + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ était quelconque, on obtient (3.2). □

Lemme 3.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et $A = A^*$. Alors*

$$\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n} \quad \textit{pour tout } n \geq 1.$$

En particulier, $r(A) = \|A\|$.

Démonstration. On a

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = (A^2u, u) \leq \|A^2\|\,\|u\|^2,$$

d'où on conclut que $\|A\|^2 \leq \|A^2\|$. D'autre part, il est évident que $\|A\|^2 \geq \|A^2\|$, et donc $\|A\|^2 = \|A^2\|$. En réitérant cette relation, on obtient

$$\|A^{2^n}\| = \big\|(A^{2^{n-1}})^2\big\| = \big\|A^{2^{n-1}}\big\|^2 = \cdots = \|A\|^{2^n}.$$

Comme

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \geq \limsup_{n\to\infty} \big\|A^{2^n}\big\|^{2^{-n}} = \|A\|,$$

on voit que $r(A) \geq \|A\|$. D'autre part, on sait que $r(A) \leq \|A\|$, d'où le résultat. □

Corollaire 3.3. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, $A = A^*$ et $r(A) = 0$. Alors $A = 0$.*

On dit que A est un opérateur compact si pour toute suite bornée $\{u_n\} \subset H$ la suite $\{Au_n\}$ a un point d'accumulation. Le théorème suivant donne une description complète des opérateurs auto-adjoints compacts.

Théorème 3.4. *Soit A un opérateur auto-adjoint compact. Alors il existe une base orthonormée $\{\varphi_n\} \subset H$ et une suite $\lambda_n \to 0$ telles que*

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, \varphi_n)\varphi_n \quad \textit{pour tout } u \in H. \tag{3.3}$$

Démonstration. Etape 1. Montrons d'abord que soit $r(A)$ soit $-r(A)$ est une valeur propre de A. En effet, comme $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ est fermé, au moins un des deux points $r(A)$ et $-r(A)$ appartient au spectre. On note ce point λ_1. Si $\mathrm{Ker}(\lambda_1 I - A) = \{0\}$, alors $\overline{\mathrm{Im}(\lambda_1 I - A)} = H$, et on voit que l'inverse de $\lambda_1 I - A$ n'est pas borné. Soit $\{u_n\} \subset H$ une suite telle que

$$\|u_n\| = 1 \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$
$$f_n = (\lambda_1 I - A)u_n \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Comme A est compact et $\lambda_1 \neq 0$ (sinon $A = 0$, et le résultat est trivial), on peut supposer que la suite $u_n = \lambda_1^{-1}(f_n + Au_n)$ converge vers un point $\varphi_1 \in H$ avec $\|\varphi_1\| = 1$. En passant à la limite quand $n \to \infty$, on obtient $A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$.

Etape 2. On raisonne maintenant par récurrence. Soit H_1 le complémentaire orthogonal de $\mathrm{Vect}(\varphi_1)$ et A_1 la restriction de A à l'espace H_1 qui est invariant par A. Alors, soit $r(A_1) = 0$, et dans ce cas $A_1 = 0$ et $\lambda_n = 0$ pour $n \geq 2$, soit $r(A_1) > 0$. Dans le deuxième cas, en utilisant l'argument de l'étape 1, on montre que $\lambda_2 = \pm r(A_1)$ est une valeur propre de A_1 et on note φ_2 le vecteur propre correspondant avec $\|\varphi_2\| = 1$. En réitérant cette procédure, on obtient une suite orthonormée $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ avec $1 \leq N \leq \infty$ telle que

$$A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, \quad r\big(A|_{H_n}\big) = |\lambda_{n+1}| \quad \text{pour tout } n \geq 1, \tag{3.4}$$

où H_n désigne le complémentaire orthogonal de $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, λ_n sont des réels, et $\lambda_{N+1} = 0$ si $N < \infty$. Dans ce dernier cas, on a

$$Au = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (u, \varphi_n)\varphi_n, \tag{3.5}$$

et si on pose $\lambda_n = 0$ pour $n \geq N+1$, on obtient la relation (3.3), où $\{\varphi_n\}$ est une base orthonormée dans H_N.

Etape 3. Supposons maintenant que $N = \infty$ et montrons que la restriction de A à l'espace $H_\infty = (\mathrm{Vect}\{\varphi_n, n \geq 1\})^\perp$ est un opérateur nul. En effet, montrons d'abord que $\lambda_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Si ce n'est pas le cas, alors $|\lambda_n| \geq \varepsilon > 0$, car $|\lambda_n|$ est une suite décroissante. On a

$$\|A\varphi_k - A\varphi_n\| = \|\lambda_k \varphi_k - \lambda_n \varphi_n\| \geq \sqrt{2}\varepsilon,$$

et on voit que $\{A\varphi_n\}$ ne contient pas de sous-suite convergente. Ceci contredit à la compacité de A.

Supposons maintenant que l'opérateur $A_\infty = A|_{H_\infty}$ n'est pas nul. Alors, d'après l'étape 1, il a un vecteur propre ψ à valeur propre $\mu \neq 0$. Donc, on a $r(A_\infty) \geq |\mu| > 0$. D'autre part,

$$r(A_\infty) \leq r(A_n) = \lambda_{n+1} \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

La contradiction obtenue montre que $A_\infty = 0$, et on obtient la relation (3.3). $\square$

Exercice 3.5. Soit $I = [a, b]$ un intervalle fini, $K \in C(I \times I)$ une fonction telle que $K(x, y) = K(y, x)$ et $A : L^2(I) \to L^2(I)$ l'opérateur intégrale

$$(Au)(x) = \int_I K(x, y)u(y)\,dy, \quad u \in L^2(I).$$

Montrer que A est opérateur auto-adjoint compact.

3.2 Opérateurs auto-adjoints à résolvante compacte

Théorème 3.6. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \to H$ un opérateur auto-adjoint tel que la résolvante $R_\lambda(A)$ est compacte pour un réel λ. Alors il existe une base orthonormée $\{\varphi_n\}$ et une suite réelle μ_n telles que $|\mu_n| \to \infty$ et*

$$A\varphi_n = \mu_n \varphi_n \quad \textit{pour tout } n \geq 1. \tag{3.6}$$

De plus,

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{u \in H : \sum_{n=1}^{\infty} |(u, \varphi_n)|^2 < \infty\Big\}, \tag{3.7}$$

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (u, \varphi_n)\varphi_n. \tag{3.8}$$

Démonstration. L'opérateur $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est auto-adjoint et compact. D'après le théorème 3.4, il existe une base orthonormée $\{\varphi_n\} \subset H$ et et une suite $\lambda_n \to 0$ tel que $\lambda_n \neq 0$ et

$$R_\lambda(A)\varphi_n = \lambda_n\varphi_n \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

On voit que $\varphi_n \in \mathcal{D}(A)$. En appliquant l'opérateur $\lambda I - A$, on obtient

$$\varphi_n = \lambda_n(\lambda I - A)\varphi_n,$$

d'où on voit que (3.6) a lieu avec $\mu_n = \lambda - \lambda^{-1}$. Les relations (3.7) et (3.8) sont des conséquences directes de (3.6). $\square$

Exemple 3.7. Considérons l'opérateur différentielle $A_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$, défini sur l'espace $C_0^\infty(J)$, où $J =]0,1[$. Il est facile à vérifier que si $q \in L^\infty(J)$, alors $A_0 \subset A_0^*$ et $(A_0u, u) \geq -M\|u\|^2$ pour tout $u \in \mathcal{D}(A_0)$. On note A l'extension de Friedrichs pour A:

$$\mathcal{D}(A) = H^2(J) \cap H_0^1(J), \quad Au = -\frac{d^2u}{dx^2} + q(x)u.$$

Montrons que A est un opérateur à résolvante compacte. En effet, si $\|q\|_{L^\infty} = M$ et $\lambda = -1 - M$, alors

$$\big((\lambda I - A)u, u\big) \leq -\big(\|u\|^2 + \|u'\|^2\big), \quad u \in \mathcal{D}(A),$$

d'où on voit que

$$\|(\lambda I - A)u\|^2 \geq \|u\|^2 + \|u'\|^2, \quad u \in \mathcal{D}(A).$$

Ceci entraîne que $\lambda \in \rho(A)$ et que $R_\lambda(A)$ est compact. On peut donc appliquer le théorème 3.6 et conclure qu'il existe une base orthonormée $\{\varphi_n\}$ de $L^2(J)$ et une suite $\lambda_n \to +\infty$ telles que $\varphi_n \in \mathcal{D}(A)$ et $A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 3.8. Soit A un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte.

(a) Montrer que $\sigma(A) = \{\mu_n, n \geq 1\}$, où μ_n sont des réelles construites dans le théorème 3.6.

(b) Montrer que l'équation $(A - \mu_n I)u = f$ possède une solution si et seulement si $f \in H_{\mu_n}^\perp$, où H_μ désigne le sous-espace des vecteurs $\varphi \in H$ vérifiant $A\varphi = \mu\varphi$.