4 Théorème spectral et calcul fonctionnel

4.1 Résultats préliminaires

Nous présentons ici quatre résultats qui seront utilisés dans la suite. Les deux premiers théorèmes sont bien connus, et nous renvoyons aux livres [Ric09, Rev84] pour leur démonstration. Soit X un espace métrique compact et $C(X)$ l'espace des fonctions continues $f : X \to \mathbb{C}$.

Théorème 4.1 (Riesz–Markov). *Soit $\ell : C(X) \to \mathbb{C}$ une fonctionnelle linéaire telle que $\ell(f) \geq 0$ pour toute $f \in C(X)$ positive et $\ell(\mathbf{1}) = m > 0$, où $\mathbf{1}$ désigne la fonction identiquement égale à 1. Alors il existe une mesure μ sur X telle que $\mu(X) = m$ et*

$$\ell(f) = \int_X f\, d\mu \quad \textit{pour tout } f \in C(X). \tag{4.1}$$

Soit maintenant X un espace métrique complet séparable. On note $L^\infty(X)$ l'espace des fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ boréliennes bornées et $C_b(X) \subset L^\infty(X)$ le sous-espace des fonctions continues. Soit $\{g_n\} \subset L^\infty(X)$ une suite. On dit que $\{g_n\}$ *b-converge vers* $g \in L^\infty(X)$ si $\sup_{n,x} |g_n(x)| < \infty$ et $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in X$.

Théorème 4.2 (lemme des classes monotones). *La classe $L^\infty(X)$ est l'espace vectoriel minimal contenant $C_b(X)$ et stable pour la b-convergence.*

Soit $\mathcal{R}$ l'espace des fonctions rationnelles bornées sur $\mathbb{R}$ et $C(\dot{\mathbb{R}})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui convergent vers une limite quand $|x| \to \infty$. Le résultat suivant sera utile pour la construction du calcul fonctionnel continu.

Lemme 4.3. *L'espace $\mathcal{R}$ est dense dans $C(\dot{\mathbb{R}})$.*

Démonstration. Soit $f \in C(\dot{\mathbb{R}})$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$. Dans ce cas

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{(x-y)^2 + \varepsilon^2}\, dy,$$

où la limite est uniforme par rapport à $x \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que, uniformément par rapport à $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \lim_{R \to \infty} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-R}^{R} \frac{f(y)}{(x-y)^2 + \varepsilon^2}\, dy. \tag{4.2}$$

Remarquons maintenant que la fonction

$$g_{\varepsilon,x}(z) = \frac{1}{(x-z)^2 + \varepsilon^2}, \quad z \in \mathbb{C},$$

est holomorphe dans la bande $|\operatorname{Im} z| < \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ on peut écrire

$$g_{\varepsilon,x}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{\varepsilon,x}^{(k)}(y_0)}{k!}(y - y_0)^k,$$

où la série converge uniformément pour $|z - y_0| \leq \varepsilon/2$ et $x \in \mathbb{R}$. Cette représentation implique que l'intégrale dans (4.2) peut être approchée uniformément en $x \in \mathbb{R}$ par des fonctions rationnelles bornées. □

Enfin, le dernier résultat donne, pour tout opérateur auto-adjoint A dans un espace de Hilbert H, une représentation de H comme la somme directe de sous-espaces invariants qui possèdent un vecteur cyclique. Plus précisément, un sous espace $H' \subset H$ est dit *invariant* par A si $R_\lambda(A)H' \subset H'$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Pour un sous-espace invariant H', on dit que $\psi \in H'$ est un *vecteur cyclique* si le sous-espace engendré par $R_\lambda(A)\psi$ avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est dense dans H'.

Proposition 4.4. *Soit A un opérateur auto-adjoint dans H. Alors il existe des sous-espaces invariants H_n, $n = 1, 2, \dots, N$, avec $N \leq \infty$, tels que*

$$H = \bigoplus_{n=1}^{N} H_n, \tag{4.3}$$

et pour tout n le sous-espace H_n possède un vecteur cyclique $\psi_n \in \mathcal{D}(A)$.

Démonstration. Soit $\{\varphi_j\} \subset H$ une suite dense dans H. Alors l'espace vectoriel engendré par la famille $\{R_\lambda(A)\varphi_j, j \geq 1, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$ est dense dans H. On note H_1 le sous-espace vectoriel fermé engendré par $R_\lambda(A)\varphi_1$ avec $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ et on fixe $\lambda_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Alors H_1 est un sous-espace invariant pour A et $\psi_1 := R_{\lambda_0}(A)\varphi_1$ est un vecteur cyclique. Soit $j_1 \geq 2$ l'entier minimal tel que $\varphi_{j_1} \notin H_1$ et $\psi_2 = R_{\lambda_0}(\varphi_{j_1} - P_{H_1}\varphi_{j_1})$. On définit H_2 comme l'espace vectoriel fermé engendré par $R_\lambda(A)\psi_2$ avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Il est facile à voir que H_1 and H_2 sont des espaces orthogonaux et que ψ_2 est un vecteur cyclique pour l'espace invariant H_2. En réitérant cette procédure, on obtient un entier $N \leq \infty$ et une suite (finie ou infinie) d'espaces invariants orthogonaux $\{H_n\}$ avec des vecteurs cycliques ψ_n. Comme $\{\varphi_j\}$ engendre tout l'espace H et $i\lambda R_{i\lambda}(A) \to I$ pour la topologie forte quand $\lambda \to +\infty$, on conclut que (4.3) a lieu. □

4.2 Calcul fonctionnel continu

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $r_\lambda(x) = (\lambda - x)^{-1}$. Le théorème suivant permet de définir, de façon naturelle, des opérateurs de la forme $f(A)$ avec $f \in C(\dot{\mathbb{R}})$.

Théorème 4.5. *Soit A un opérateur auto-adjoint dans H. Alors il existe une unique application $\Phi : C(\dot{\mathbb{R}}) \to \mathcal{L}(H)$ avec les propriétés suivantes.*

(i) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a $\Phi(r_\lambda) = R_\lambda(A)$.*

(ii) *Φ est un homomorphisme algébrique; c'est-à-dire,*

$$\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g), \tag{4.4}$$

$$\Phi(\lambda f + g) = \lambda\Phi(f) + \Phi(g), \tag{4.5}$$

$$\Phi(\mathbf{1}) = I, \quad \Phi(\bar{f}) = \Phi(f)^*, \tag{4.6}$$

où **1** *désigne la fonction identiquement égale à* 1.

De plus, Φ possède les propriétés suivantes:

(iii) *Φ préserve la positivité; c'est-à-dire, si $f \geq 0$, alors $\Phi(f) \geq 0$.*

(iv) *Pour tout $f \in C(\dot{\mathbb{R}})$, on a*

$$\|\Phi(f)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|. \tag{4.7}$$

(v) *Si $\{f_n\} \subset C(\dot{\mathbb{R}})$ est une suite telle que $\sup_{n,x} |f_n(x)| < \infty$ et $f_n(x) \to 0$ uniformément sur tout interval borné, alors*

$$\Phi(f_n) \xrightarrow{s} 0 \quad \textit{quand } n \to \infty. \tag{4.8}$$

Dans la suite, on écrit parfois $\Phi(f) = f(A)$.

Démonstration. Nous allons construire le calcul fonctionnel en deux étapes : d'abord pour les fonctions rationnelles et après, en utilisant un argument d'approximation, pour les fonctions continues avec une limite à l'infini.

Étape 1. Rappelons qu'on note $\mathcal{R}$ l'ensemble des fonctions rationnelles bornées sur $\mathbb{R}$. Montrons qu'il existe une unique application $\Phi : \mathcal{R} \to \mathcal{L}(H)$ vérifiant (i)–(iii). En effet, toute fonction rationnelle bornée sur $\mathbb{R}$ est représentable comme la somme d'une constante et de certaines fonctions de la forme

$$q_\lambda(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{c_j}{(\lambda - x)^j}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $c_j \in \mathbb{C}$. De plus, cette représentation est unique. Tout homomorphisme algébrique vérifiant (i) est uniquement défini sur q_λ:

$$\Phi(q_\lambda) = \sum_{j=1}^{k} c_j R_\lambda^j(A).$$

Ces observations impliquent immédiatement l'unicité de Φ, ainsi que les propriétés (i), (4.5) et (4.6). Pour terminer la construction de Φ sur $\mathcal{R}$, il nous reste à vérifier la relation (4.4).

On peut supposer que $f = g$. Soit

$$f(z) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{c_{jk}}{(\lambda_k - x)^j},$$

où $c_{jk} \in \mathbb{C}$ et $\lambda_k \neq \lambda_l$ pour $k \neq l$. En vertu de la linéarité, il suffit de montrer que

$$\Phi\big((\lambda_k - x)^{-j}(\lambda_l - x)^{-n}\big) = R^j_{\lambda_k}(A)R^n_{\lambda_l}(A). \tag{4.9}$$

Cette égalité est évidente si $k = l$. Supposons que $k \neq l$ et donc $\lambda_k \neq \lambda_l$. Sans perte de généralité, on peut supposer aussi que $n \geq j$, et on raisonne par récurrence par rapport à $n \geq 1$ et $j \leq n$. Pour $n = j = 1$, on a

$$(\lambda_k - x)^{-1}(\lambda_l - x)^{-1} = (\lambda_l - \lambda_k)^{-1}\big((\lambda_k - x)^{-1} - (\lambda_l - x)^{-1}\big). \tag{4.10}$$

En utilisant l'identité résolvante (1.2), on obtient

$$\begin{aligned}\Phi\big((\lambda_k - x)^{-1}(\lambda_l - x)^{-1}\big) &= (\lambda_l - \lambda_k)^{-1}\Phi\big((\lambda_k - x)^{-1} - (\lambda_l - x)^{-1}\big)\\ &= (\lambda_l - \lambda_k)^{-1}\big(R_{\lambda_k}(A) - R_{\lambda_l}(A)\big) = R_{\lambda_k}(A)R_{\lambda_l}(A).\end{aligned}$$

Cette égalité est confondue avec (4.9) pour $j = n = 1$. Supposons maintenant que $n \geq 2$, $j \leq n$ et que la relation (4.9) avec $j = j'$ et $n = n'$ est vraie pour $n' < n$ et $j' \leq n'$, ainsi que pour $n' = n$ et $j' \leq j - 1$. Alors (4.10) implique

$$\begin{aligned}&(\lambda_k - x)^{-j}(\lambda_l - x)^{-n}\\ &\quad= (\lambda_l - \lambda_k)^{-1}\big((\lambda_k - x)^{-j}(\lambda_l - x)^{-(n-1)} - (\lambda_k - x)^{-(j-1)}(\lambda_l - x)^{-n}\big).\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\Phi\big((\lambda_k - x)^{-j}(\lambda_l - x)^{-n}\big) = (\lambda_l - \lambda_k)^{-1}\big(R^j_{\lambda_k}(A)R^{n-1}_{\lambda_l}(A) - R^{j-1}_{\lambda_k}(A)R^n_{\lambda_l}(A)\big)$$

L'application de l'identité résolvante achève la démonstration de (4.4).

Étape 2. On veut utiliser maintenant le lemme 4.3 afin de prolonger Φ à l'espace $C(\dot{\mathbb{R}})$. Pour cela il suffit de montrer l'inégalité (4.7) pour tout $f \in \mathcal{R}$. En effet, une fois cette inégalité sera établie, on pourra étendre Φ à $C(\dot{\mathbb{R}})$ par continuité et vérifier la propriété (ii) par passage à la limite. La démonstration l'inégalité (4.7) est basée sur la propriété (iii) de Φ que nous allons maintenant établir.

Montrons d'abord que si $f \in \mathcal{R}$ est positive sur $\mathbb{R}$, alors il existe $g \in \mathcal{R}$ tel que $f(z) = g^*(z)g(z)$, où $g^*(z) = \overline{g(\bar{z})}$. En effet, il existent des polynômes P et Q tels que $Q(x) \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ et

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)Q^*(z)}{|Q(z)|^2}.$$

Comme $f(x) \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$, les racines réelles du polynôme $P(z)Q^*(z)$ sont de multiplicité paire et pour toute racine $z_* \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ son conjugué complexe $\bar{z}_*$ est aussi une racine. On peut donc écrire

$$P(z)Q^*(z) = a\prod_{j=1}^{m}(z - x_j)^2\prod_{l=1}^{n}(z - z_l)(z - \bar{z}_l),$$

où $a > 0$, $x_j \in \mathbb{R}$ et $z_l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On conclut que la représentation cherchée a lieu avec

$$g(z) = \sqrt{a}\, Q(z)^{-1} \prod_{j=1}^{m} (z - x_j) \prod_{l=1}^{n} (z - z_l).$$

Supposons maintenant que $f \in \mathcal{R}$ soit une fonction positive sur $\mathbb{R}$. Alors il existe $g \in \mathcal{R}$ tel que $f(x) = |g(x)|^2$. Les relations (4.4) et (4.6) impliquent que

$$\Phi(f) = \Phi(\bar{g}g) = \Phi(\bar{g})\, \Phi(g) = \Phi(g)^*\, \Phi(g),$$

d'où on conclut que $\Phi(f) \geq 0$.

On démontre maintenant (4.7). Supposons que $f \in \mathcal{R}$ est tel que $|f(x)| \leq 1$ pour $x \in \mathbb{R}$. On veut montrer que $\|\Phi(f)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$. Pour tout $u \in H$, on écrit

$$\|u\|^2 - \big(\Phi(f)u, \Phi(f)\big) = (u - \Phi(f)^*\Phi(f), u) = \big(\Phi(1 - |f|^2)u, u\big) \geq 0,$$

où on a utilisé la positivité de Φ. Comme $u \in H$ est quelconque, on obtient l'inégalité cherchée.

Nous avons montré que $\Phi : \mathcal{R} \to \mathcal{L}(H)$ admet une unique extension continue à l'espace $C(\dot{\mathbb{R}})$. De plus, on obtient par continuité les propriétés (iii) et (iv). Il nous reste à montrer (v). Pour toute fonction rationnelle g qui converge vers zéro à l'infini, la suite $\{f_n g\}$ converge vers zéro uniformément sur $\mathbb{R}$. D'après (iv), on a $\Phi(f_n g) \to 0$ dans $\mathcal{L}(H)$. Comme $\{\Phi(g)u, u \in H, g \in \mathcal{R}, g \to 0 \text{ à l'infini}\}$ est dense dans H, on conclut que $\Phi(f_n) \to 0$ pour la topologie forte. □

4.3 Théorème sur la représentation spectrale

Le résultat suivant est un analogue du théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints bornés dans le cas d'opérateurs non bornés.

Théorème 4.6. *Soit A un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert H. Alors il existe un espace mesuré $(X, \mathcal{B})$ munie d'une mesure de probabilité μ, une isométrie $U : H \to L^2(X, \mu)$ et une fonction mesurable $a : X \to \mathbb{R}$ finie μ-presque partout tels que*

$$UAU^{-1} = M_a, \tag{4.11}$$

où M_a désigne l'opérateur de multiplication par $a(x)$.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où A possède un vecteur cyclique et montrer qu'on puisse choisir une mesure μ avec la masse totale donnée. En effet, supposons que ce résultat soit vrai. D'après la proposition 4.4, l'espace H est représentable sous la forme (4.3). On fixe $c_n > 0$ tels que $\sum_n c_n = 1$. Pour chaque n, on peut construire un espace mesuré $(X_n, \mathcal{B}_n, \mu_n)$ avec $\mu_n(X_n) = c_n$, une isométrie $U_n : H_n \to L^2(X_n, \mu_n)$ et une fonction a_n tels que $U_n A_n U_n^{-1} = M_{a_n}$, où A_n désigne la restriction de A à H_n. On définit maintenant l'espace $X = \bigcup_{n=1}^{N} X_n$ muni de la tribu minimale $\mathcal{B}$ engendrée par $\mathcal{B}_n$, $1 \leq n \leq N$, et de l'unique mesure μ sur X telle que $\mu(\Gamma) = \mu_n(\Gamma)$ pour $\Gamma \in \mathcal{B}_n$. De plus, soit $a : X \to \mathbb{R}$ telle que $a(x) = a_n(x)$ pour $x \in X_n$. On définit une isométrie $U : H \to L^2(X, \mu)$ par la relation

$$U\Big(\sum_{n=1}^{N} \varphi_n\Big)(x) = (U_n \varphi_n)(x) \quad \text{pour } x \in X_n,$$

où $\sum_n \varphi_n$ est la décomposition associée à (5.2). Il est facile à vérifier que toutes les propriétés requises sont satisfaites.

On fixe maintenant $c > 0$ et on suppose que $\psi \in H$ est un vecteur cyclique pour A tel que $\|\psi\|^2 = c$. Alors $\{R_\lambda(A)\psi, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$ est dense dans H. Considérons la fonctionnelle $\ell : C(\dot{\mathbb{R}}) \to \mathbb{C}$ définie par

$$\ell(f) = \big(f(A)\psi, \psi\big) \quad \text{pour } f \in C(\dot{\mathbb{R}}).$$

C'est une fonctionelle continue telle que $\ell(\mathbf{1}) = c$. Comme $C(\dot{\mathbb{R}})$ est isométrique à l'espace des fonctions continues sur un cercle $\mathbb{S}$, d'après le théorème de Riesz–Markov, il existe une unique mesure $\tilde{\mu}$ sur $\mathbb{S}$ de la masse totale c telle que

$$\big(f(A)\psi, \psi\big) = \int_{\mathbb{R}} f d\mu \quad \text{pour } f \in C(\dot{\mathbb{R}}), \tag{4.12}$$

où on note μ la mesure sur l'espace $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (la compactification de $\mathbb{R}$) associée à $\tilde{\mu}$. Montrons que $\mu(\{\infty\}) = 0$. Soit $\{f_n\} \subset C_0(\mathbb{R})$ une suite de fonctions telles que $0 \le f_n \le 1$ et $f_n \to 1$ uniformément sur tout intervalle borné. Alors, d'après la propriété (v) du théorème 4.5 on a

$$\mu(\mathbb{R}) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \big(f_n(A)\psi, \psi\big) = (\psi, \psi) = c.$$

Comme c est la masse totale de $\tilde{\mu}$, on conclut que $\mu(\{\infty\}) = 0$.

Soit maintenant l'espace $X = \mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}$ et de la mesure μ. On définit une application U sur un sous-espace dense de H à valeurs dans $L^2(X, \mu)$ par la formule

$$U\big(f(A)\psi\big) = f \quad \text{pour } f \in C(\dot{\mathbb{R}}). \tag{4.13}$$

Alors on a

$$\big\|U\big(f(A)\psi\big)\big\|^2_{L^2(X,\mu)} = \int_X |f|^2 d\mu = \big(|f|^2(A)\psi, \psi\big) = \big\|f(A)\psi\big\|^2.$$

Comme l'espace $C(\dot{\mathbb{R}})$ est dense dans $L^2(X, \mu)$, on peut prolonger U par continuité à une isométrie entre H et $L^2(X, \mu)$. Montrons que la relation (4.11) a lieu avec la fonction $a(x) = x$.

D'après (4.13), pour toutes fonctions $f, g \in C(\dot{\mathbb{R}})$ on a

$$U\big(g(A)(f(A)\psi)\big) = gf.$$

Comme U est une isométrie, il s'ensuit que

$$U\big(g(A)v\big) = g(Uv) \quad \text{pour tout } v \in H. \tag{4.14}$$

Prenons dans cette égalité $g_n(x) = \lambda_n(\lambda_n r_{\lambda_n}(x) - 1)$ avec $\lambda_n = in$. Comme $g_n = x\hat{g}_n$ avec $\hat{g}_n(x) = \lambda_n r_{\lambda_n}(x)$, on peut écrire

$$U(g_n(A)v) = U(\hat{g}_n(A)Av) = g_n(x)(Uv)(x) \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{D}(A).$$

La propriété (v) du théorème 4.5 implique que les deux premiers termes de cette égalité convergent dans $L^2(X,\mu)$. Il en est donc de même pour le membre de droite, qui ne peut converger que vers $x(Uv)(x)$. On a montré que $Uv \in \mathcal{D}(M_x)$ et $U(Av) = M_x(Uv)$. Réciproquement, supposons que $h \in \mathcal{D}(M_x)$. Alors, en prenant $v = U^{-1}h$ et $g = g_n$ dans la relation (4.14) et la multipliant par U^{-1}, on obtient

$$g_n(A)U^{-1}h = A\big(\lambda_n R_{\lambda_n}(A)U^{-1}h\big) = U^{-1}(\hat{g}_n\, M_x h).$$

Soit $v_n = \lambda_n R_{\lambda_n}(A)U^{-1}h$. Alors $v_n \to U^{-1}h$, et la relation ci-dessous implique $Av_n \to U^{-1}(M_x h)$ dans H. Comme A est fermé, on conclut que $U^{-1}h \in \mathcal{D}(A)$ et $AU^{-1}h = U^{-1}(M_x h)$. Ceci achève la démonstration de (4.11). □

Le théorème 4.6 permet d'établir facilement des propriétés supplémentaires de l'application Φ construite dans théorème 4.5.

Corollaire 4.7. *L'application $\Phi : C(\dot{\mathbb{R}}) \to \mathcal{L}(H)$ construite dans le théorème 4.5 possèdent les propriétés suivantes.*

- **(i)** *Soit $\{f_n\} \subset C(\dot{\mathbb{R}})$ une suite b-convergeant vers une fonction $f \in C(\dot{\mathbb{R}})$. Alors $\Phi(f_n) \to \Phi(f)$ pour la topologie forte.*
- **(ii)** *Soit $f_n \in C(\dot{\mathbb{R}})$, $f_n(x) \to x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $|f_n(x)| \le |x|$. Alors*

$$\Phi(f_n)u \to Au \quad \textit{pour tout } u \in \mathcal{D}(A).$$

- **(iii)** *Si $Au = \lambda u$, alors $\Phi(f)u = f(\lambda)u$ pour tout $f \in C(\dot{\mathbb{R}})$.*

Démonstration. Considérons une application $\Phi' : C(\dot{\mathbb{R}}) \to \mathcal{L}(H)$ définie par

$$\Phi'(f) = U^{-1}M_{f(a)}U, \tag{4.15}$$

où l'isométrie U et la fonction a sont celles du théorème 4.6. Il est facile à vérifier que Φ' possèdent les propriétés (i)–(iii) du théorème 4.5. Par l'unicité, on doit avoir $\Phi' = \Phi$. Comme U est une isométrie, il suffit de montrer les propriétés (i)–(iii), en supposant que $H : L^2(X,\mu)$, $A = M_a$ et $f(A) = M_{f(a)}$.

La propriété (i) est une conséquence immédiate du théorème de Lebesgue sur la convergence dominée. Pour montrer (ii), remarquons que si $u \in \mathcal{D}(A)$, alors $u, au \in L^2(X,\mu)$. Il s'ensuit que

$$\Phi(f_n)u = f_n(a)u \to au \quad \text{dans } L^2(X,\mu),$$

où on a utilisé le fait que $|f_n(a)u| \leq |au|$, ainsi que le théorème de Lebesgue. Enfin, pour établir (iii), il suffit de remarquer que $u \in L^2(X, \mu)$ est un vecteur propre de M_a avec une valeur propre λ si est seulement si l'ensemble $\Gamma := a^{-1}(\lambda)$ a une μ-mesure positive et $u(x) = C\, I_\Gamma(x)$, où $C \neq 0$. On a donc

$$f(A)u = C\, M_{f(a)} I_\Gamma = C f(\lambda) I_\Gamma = f(\lambda)u.$$

Ceci termine la démonstration du corollaire. □

4.4 Calcul fonctionnel borélien

Rappelons que $L^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ boréliennes bornées. Nous allons maintenant établir un résultat qui permet de définir $f(A)$ pour tout $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Théorème 4.8. *Soit A un opérateur auto-adjoint dans H. Alors il existe une unique application $\Phi : L^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(H)$ vérifiant les propriétés* (i), (ii) *du théorème 4.5 et telle que $\Phi(f_n) \xrightarrow{s} \Phi(f)$ pour toute suite $\{f_n\} \subset L^\infty(\mathbb{R})$ qui b-converge vers f. De plus, Φ préserve la positivité, vérifie l'inégalité* (4.7) *pour toute fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et possède les propriétés suivantes.*

(i) *Si $f_n \in L^\infty(\mathbb{R})$, $f_n(x) \to x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $|f_n(x)| \leq |x|$, alors*

$$\Phi(f_n)u \to Au \quad \textit{pour tout } u \in \mathcal{D}(A).$$

(ii) *Si $Au = \lambda u$, alors $\Phi(f)u = f(\lambda)u$ pour tout $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Montrons d'abord l'existence. On note $L^2(X, \mu)$, $a : X \to \mathbb{R}$ et U l'espace, la fonction et l'isométrie construits dans le théorème 4.5. On pose alors

$$\Phi(f) = U M_{f(a)} U^{-1}, \quad f \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

On vérifie facilement toutes les propriétés requises.

Pour démontrer l'unicité, nous allons utiliser le lemme des classes monotones. Supposons qu'il existe une autre application $\Phi' : L^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(H)$ vérifiant les propriétés décrites dans le théorème. On note

$$\mathcal{F} = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}) : \Phi(f) = \Phi'(f)\}.$$

Alors, d'après le théorème 4.5, on a $\mathcal{F} \supset C(\dot{\mathbb{R}})$. De plus, grace à la propriété de continuité, si $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ b-converge vers $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, alors $f \in \mathcal{F}$. Le théorème 4.2 implique que $\mathcal{F} \supset L^\infty(\mathbb{R})$, d'où on conclut que $\Phi = \Phi'$. □