5 Groupe et semigroupe d'opérateurs

5.1 Théorème de Stone

Soit H un espace de Hilbert et $\{U(t), t \in \mathbb{R}\}$ une famille d'opérateurs bornés.

Définition 5.1. On dit que $U(t)$ est un groupe unitaire fortement continu si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) $U(t)$ est un opérateur unitaire pour tout $t \in \mathbb{R}$ et

$$U(t+s) = U(t)U(s) \quad \text{pour tous } t, s \in \mathbb{R}.$$

(ii) Si $\varphi \in H$, alors $U(t)\varphi \to U(t_0)\varphi$ quand $t \to t_0$.

Pour tout groupe unitaire, on définit son *générateur* par

$$D(A) = \Big\{\psi \in H : \exists \lim_{t\to 0} t^{-1}(U(t)\psi - \psi)\Big\}, \quad A\psi = -i \lim_{t\to 0} t^{-1}(U(t)\psi - \psi).$$

Exercice 5.2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\psi \in D(A)$, on a $U(t)\psi \in D(A)$ et

$$\frac{d}{dt}U(t)\psi = iAU(t)\psi = iU(t)A\psi.$$

Théorème 5.3. *Soit A un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert H. Alors il existe un unique groupe unitaire $U(t)$ dont le générateur est égal à A. Réciproquement, si $U(t)$ est un groupe unitaire fortement continu, alors son générateur est un opérateur auto-adjoint.*

Démonstration. Soit A un opérateur auto-adjoint. Alors, d'après le théorème spectral (voir §4), on peut supposer que $H = L^2(M,\mu)$, où $(M,\mathcal{B},\mu)$ est un espace mesuré, et que A est l'opérateur de multiplication par une fonction réelle mesurable $a(m)$. Dans ce cas, on définit $U(t) = e^{itA}$ comme l'opérateur de multiplication par $e^{ita(m)}$. Il s'ensuit que

$$\big(e^{itA}\big)^{-1} = e^{-itA} = \big(e^{itA}\big)^*, \quad e^{itA}e^{isA} = e^{i(t+s)A}.$$

De plus, si $\varphi \in L^2(M,\mu)$, alors en utilisant le théorème de Lebesgue, on obtient

$$\|e^{itA}\varphi - \varphi\|^2 = \int_M \big|e^{ita(m)} - 1\big|^2 |\varphi(m)|^2 d\mu \to 0 \quad \text{quand } t \to 0.$$

Montrons que le générateur B du groupe $U(t)$ est égal à A. En effet, maintenant $\psi \in \mathcal{D}(A)$, c'est-à-dire, $\psi, a\psi \in L^2(M,\mu)$. Alors

$$\|t^{-1}(e^{itA}\psi - \psi) - iA\psi\|^2 = \int_M \big|t^{-1}(e^{ita(m)} - 1) - ia(m)\big|^2 |\psi(m)|^2 d\mu \to 0 \quad t \to 0,$$

où on a utilisé encore le théorème de Lebesgue. On voit que $A \subset B$. D'autre part, pour tous $\psi_1, \psi_2 \in D(B)$, on a

$$\begin{aligned}(B\psi_1, \psi_2) &= \lim_{t\to 0}\bigl(-it^{-1}(e^{itA} - I)\psi_1, \psi_2\bigr)\\ &= \lim_{t\to 0}\bigl(\psi_1, it^{-1}(e^{-itA} - I)\psi_2\bigr) = (\psi_1, B\psi_2).\end{aligned}$$

Donc, $B \subset B^*$ et $A = A^* \subset B$, d'où on conclut que $B = A$. Nous avons montré que pour chaque opérateur auto-adjoint il existe un groupe unitaire dont le générateur est confondu avec A. Montrons que ce groupe unitaire est unique. Soit $V(t)$ un autre groupe unitaire avec le générateur A. Alors pour tout $\psi \in D(A)$ la fonction $f(t) = V(-t)U(t)\psi$ vérifie l'équation

$$f'(t) = iV(-t)(-A + A)U(t)u = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

où on a utilisé l'exercice 5.2. On conclut que $g(t) = g(0) = \psi$, et donc $U(t)\psi = V(t)\psi$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme le domaine de A est dense, on voit que $V \equiv U$.

Montrons maintenant que le générateur A d'un groupe unitaire $U(t)$ est un opérateur auto-adjoint. On prouve d'abord la densité de $D(A)$. Soit $\psi \in H$ et $\{\omega_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ une approximation d'identité. On pose

$$\psi_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} \omega_\varepsilon(s)U(s)\psi\, ds, \quad \varepsilon > 0.$$

Alors $\psi_\varepsilon \to \psi$ quand $\varepsilon \to 0^+$. De plus,

$$\begin{aligned}t^{-1}\bigl(U(t)\psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\bigr) &= \int_{\mathbb{R}} t^{-1}\bigl(\omega_\varepsilon(s-t) - \omega_\varepsilon(s)\bigr)U(s)\psi\, ds\\ &\to \int_{\mathbb{R}} \omega'_\varepsilon(s)U(s)\psi\, ds \quad \text{as } \varepsilon \to 0^+,\end{aligned}$$

d'où on voit que $\psi_\varepsilon \in D(A)$.

Le fait que le générateur est un opérateur symétrique a été établit ci-dessus. Montrons que A est essentiellement auto-adjoint. D'après le corollaire 2.13, il suffit de vérifier que $\operatorname{Ker}(A^* \pm iI) = \{0\}$.

Soit $v \in D(A^*)$ tel que $(A^* + i)v = 0$. Alors $((A - i)u, v) = 0$ pour tout $u \in D(A)$. Il s'ensuit que la fonction $f(t) = (U(t)u, v)$ vérifie l'équation

$$f'(t) = (U'(t)u, v) = (iAU(t)u, v) = -(U(t)u, v) = -f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

d'où on conclut que $f(t) = ce^{-t}$. D'autre part, f est borné sur $\mathbb{R}$ et donc $c = 0$. On voit que $(u, v) = 0$ pour tout $u \in D(A)$. Comme $D(A)$ est dense, on obtient que $v = 0$. Un argument similaire montre que si $(A - i)v = 0$, alors $v = 0$.

Soit $\bar{A}$ la fermeture (auto-adjointe) de A et $\overline{U}(t)$ le groupe unitaire correspondant. Montrons que $U(t) = \overline{U}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On pose $f(t) = \overline{U}(-t)U(t)u$, où $u \in D(A)$. Alors

$$f'(t) = \overline{U}(-t)(-\bar{A} + A)U(t)u = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

d'où on conclut, en utilisant l'argument ci-dessus, que les groupes U et $\overline{U}$ sont confondus. Donc A et $\bar{A}$ sont aussi confondus et $A = A^*$. □

5.2 Théorème de Hille–Yosida

Soit X un espace de Banach et $\{S(t), t \in \mathbb{R}\}$ une famille d'opérateurs bornés dans X.

Définition 5.4. On dit que $\{S(t), t \in \mathbb{R}\}$ est un *semigroupe d'opérateurs fortement continu* si

$$S(0) = I, \qquad S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2) \quad \text{pour tous } t_1, t_2 \geq 0,$$

et la fonction $S(t)x$ est continue par rapport à $t \geq 0$ pour tout $x \in X$.

Pour $h > 0$ on définit l'opérateur $A_h = h^{-1}(S(h) - I)$. Soit $\mathcal{D}(A)$ l'ensemble des vecteurs $x \in X$ pour lesquels la limite $\lim_{h \to 0^+} A_h x$ existe et $A : \mathcal{D}(A) \to X$ l'opérateur défini par

$$Ax = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}, \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

On appelle A l'*opérateur infinitésimal* ou le *générateur* du semigroupe $S(t)$.

Proposition 5.5. *Soit $S(t)$ un semigroupe d'opérateurs fortement continu et $A : \mathcal{D}(A) \to X$ son opérateur infinitésimal. Alors :*

(i) *Il existe des constantes positives C et σ telles que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C\, e^{\sigma t}, \quad t \geq 0. \tag{5.1}$$

(ii) *$\mathcal{D}(A)$ est dense dans X et l'opérateur A est fermé.*[1]

(iii) *Le demi-plan $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \sigma\}$ est inclut dans $\rho(A)$, et la résolvante est donnée par*

$$R_\lambda(A) = \int_0^\infty S(t) e^{-\lambda t} dt \quad \text{pour } \operatorname{Re} \lambda > \sigma. \tag{5.2}$$

Démonstration. **(i)** Comme $S(t)$ est fortement continu, pour tout $x \in X$ il existe $C_x > 0$ tel que $\|S(t)x\| \leq C_x$ pour $0 \leq t \leq 1$. Le théorème de Banach–Steinhaus implique qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C, \quad t \in [0, 1]. \tag{5.3}$$

Si $t = k + r$, où k est un entier et $0 \leq r < 1$, alors $S(t) = S(r)S(1) \cdots S(1)$. L'inégalité (5.3) entraîne que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|S(1)\|^k_{\mathcal{L}(X)} \|S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C^{k+1} \leq C\, e^{\sigma(k+r)},$$

où $\sigma = \ln C$.

[1] Rappelons qu'un opérateur A est dit *fermé* si son graphe $\Gamma(A)$ est fermé dans l'espace $X \times X$.

(ii) Montrons que $\mathcal{D}(A)$ est dense. Soit $x \in X$ et $x_r = \frac{1}{r}\int_0^r S(t)x\,dt$. Alors $x_r \to x$ quand $r \to 0^+$ et $x_r \in \mathcal{D}(A)$ pour tout $r > 0$:

$$\|x_r - x\| = \Big\|\frac{1}{r}\int_0^r S(t)x\,dt - x\Big\| \le \frac{1}{r}\int_0^r \|S(t)x - x\|\,dt \to 0,$$
$$\frac{S(h)x_r - x_r}{h} = \frac{1}{rh}\Big(\int_r^{r+h} S(t)x\,dt - \int_0^h S(t)x\,dt\Big) \to \frac{1}{r}(S(r)x - x)$$

quand $r \to 0^+$. Le fait que A est fermé est une conséquence du point (iii) et de l'exercice suivant.

Exercice 5.6. Soit $A : \mathcal{D}(A) \to X$ un opérateur. Supposons qu'il existe un opérateur borné $B : X \to X$ tel que

$$ABx = x \quad \text{pour tout } x \in X, \qquad BAx = x \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}(A).$$

Montrer que A est fermé.

(iii) L'inégalité (5.1) implique que l'opérateur (5.2) est bien défini. Pour $x \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$\begin{aligned}
R_\lambda(A)(\lambda - A)x &= \int_0^\infty S(t)e^{-\lambda t}(\lambda - A)x\,dt \\
&= \lambda R_\lambda(A)x - \lim_{h\to 0^+}\int_0^\infty S(t)e^{-\lambda t}\frac{S(h)x - x}{h}\,dt \\
&= \lambda R_\lambda(A)x - \lim_{h\to 0^+}\Big(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_h^\infty S(t)e^{-\lambda t}x\,dt - h^{-1}\int_0^h S(t)e^{-\lambda t}x\,dt\Big) \\
&= \lambda R_\lambda(A)x - (\lambda R_\lambda(A)x - x) = x.
\end{aligned}$$

Un calcul similaire montre que $(\lambda - A)R_\lambda(A)x = x$ pour $x \in X$. □

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur fermé soit le générateur d'un semigroupe fortement continu.

Théorème 5.7. *Soit A un opérateur fermé avec un domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans X. Alors A est l'opérateur infinitésimal d'un semigroupe fortement continu si et seulement si il existe des réels M et ω tels que $\lambda \in \rho(A)$ pour tout $\lambda > \omega$ et*

$$\|R_\lambda(A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \le M(\lambda - \omega)^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{5.4}$$

De plus, le semigroupe est uniquement défini par son opérateur infinitésimal.

Démonstration. Etape 1. Montrons d'abord que la condition (5.1) est suffisante pour que A soit l'opérateur infinitésimal d'un semigroupe fortement continu. Considérons l'opérateur suivant (appelé la *régularisation de Yosida*) :

$$A_\lambda = \lambda(\lambda R_\lambda(A) - I) = \lambda^2(\lambda I - A)^{-1} - \lambda I.$$

Lemme 5.8. *Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, on a*

$$A_\lambda x \to Ax \quad \textit{quand } \lambda \to \infty.$$

Etape 2. Nous allons construire $S(t)$ comme la limite du semigroupe e^{tA_λ} quand $\lambda \to \infty$. Remarquons d'abord que

$$e^{tA_\lambda} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^k R_\lambda(A)^k}{k!}, \quad \lambda > \omega,$$

d'où on obtient l'estimation

$$\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} \le M\, e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!(\lambda-\omega)^k} \le M \exp(\omega t), \quad \lambda \gg 1. \tag{5.5}$$

Montrons que le semigroupe $S_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}$ converge pour la topologie forte uniformément sur tout intervalle borné $[0, T]$. En effet, pour $x \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$\begin{aligned} S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x &= \int_0^1 \frac{d}{ds}\big(S_\mu(t-s)S_\lambda(s)x\big)\, ds \\ &= \int_0^1 S_\mu(t-s)S_\lambda(s)\big(A_\lambda x - A_\mu x\big)\, ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (5.5) et le lemme 5.8, on obtient pour $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\|_X \le MT\, e^{CT} \|A_\lambda x - A_\mu x\|_X \to 0 \quad \text{quand } \lambda, \mu \to \infty.$$

Comme $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X, on conclut qu'il existe un semigroupe fortement continu $S(t)$ tel que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|S_\lambda(t)x - S(t)x\|_X \to 0 \quad \text{quand } \lambda \to \infty.$$

Etape 3. Montrons que A est l'opérateur infinitésimal du semigroupe $S(t)$. Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. En passant à la limite quand $\lambda \to \infty$ dans l'égalité

$$S_\lambda(t)x - x = \int_0^t S_\lambda(s) A_\lambda x\, ds,$$

on obtient

$$S(t)x - x = \int_0^t S(s)Ax\, ds.$$

Donc, la limite

$$\lim_{t\to 0^+} t^{-1}(S(t)x - x) \tag{5.6}$$

existe et est égale à Ax. Il nous reste à montrer que si la limite (5.6) existe, alors $x \in \mathcal{D}(A)$.

Soit B le générateur de $S(t)$. Alors pour $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ on a

$$(\lambda I - A)\mathcal{D}(A) = X = (\lambda I - B)\mathcal{D}(A), \quad (\lambda I - B)\mathcal{D}(B) = X,$$

d'où on conclut que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B) = (\lambda I - B)^{-1}X$.

Etape 4. Montrons maintenant que le semigroupe est uniquement défini par son opérateur infinitésimal. Soient $S_1(t)$ et $S_2(t)$ deux semigroupes avec le même opérateur infinitésimal A. On fixe $T > 0$ et, pour $u \in D(A)$, on définit la fonction $f(t) = S_1(T-t)S_2(t)u$. Alors

$$\frac{d}{dt}f(t) = S_1(T-t)(-A + A)S_2(t)u = 0,$$

d'où on voit que $f(0) = S_1(T)u = f(T) = S_2(T)u$. Ceci implique que S_1 and S_2 sont confondus; voir [Yos78] pour les détails.

Etape 5. Montrons que la condition (5.4) est nécessaire pour que A soit l'opérateur infinitésimal d'un semigroupe. On sait déjà que la résolvante est donnée par la formule (5.2). Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} R_\lambda(A)^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty S(t_1)S(t_2)e^{-\lambda(t_1+t_2)}dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^\infty \int_0^{r_1} S(r_1)e^{-\lambda r_1}dr_2 dr_1 = \int_0^\infty r_1 S(r_1)e^{-\lambda r_1}dr_1. \end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient

$$R_\lambda(A)^n = \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}S(t)e^{-\lambda t}dt.$$

Cette relation et l'inégalité (5.1) implique le résultat cherché. □

Démonstration du lemme 5.8. Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Alors

$$\|\lambda R_\lambda(A)x - x\|_X = \|R_\lambda(A)Ax\|_X \le M(\lambda - \omega)^{-1}\|Ax\|_X \to 0$$

quand $\lambda \to \infty$. De plus,

$$\|\lambda R_\lambda(A) - I\|_{\mathcal{L}(X)} \le M\lambda(\lambda - \omega)^{-1} + 1 \le 2M + 1 \quad \text{pour } \lambda \gg 1.$$

Comme $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X, on conclut que

$$\lambda R_\lambda(A) \to I \quad \text{pour la topologie forte quand } \lambda \to \infty.$$

Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$A_\lambda x = \lambda R_\lambda(A)Ax \to Ax \quad \text{quand } \lambda \to \infty.$$

□

5.3 Applications

5.3.1 Equation de la chaleur

On note $H^s = H^s(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Sobolev d'ordre $s \geq 0$:

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : (1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)\},$$

où $\hat{u}(\xi)$ désigne la transformée de Fourier de $u(x)$. Considérons le problème

$$\partial_t u = \Delta u, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_x^d, \tag{5.7}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d, \tag{5.8}$$

où $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^d)$ est une fonction donnée. Soit A l'opérateur de Laplace avec le domaine $\mathcal{D}(A) = H^2$.

Théorème 5.9. **(i)** *L'opérateur A est auto-adjoint.*

(ii) *Pour toute donnée initiale $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^d)$ il existe une unique fonction $u \in C(\mathbb{R}_+, H^2) \cap C^1(\mathbb{R}_+, L^2)$ vérifiant les équations* (5.7), (5.8).

Démonstration. **(i)** On note $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ la transformation de Fourier et $\mathcal{F}^{-1}$ son inverse:

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\xi} u(x)\, dx,$$

$$(\mathcal{F}^{-1}v)(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} v(\xi)\, d\xi.$$

Alors $A = \mathcal{F}^{-1} M_{-|\xi|^2} \mathcal{F}$, où $M_a = M_{a(\xi)}$ désigne l'opérateur de multiplication par la fonction $a(\xi)$ avec le domaine

$$\mathcal{D}(M_a) = \{v \in L^2(\mathbb{R}^d) : av \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

Comme $M_{-|\xi|^2}$ est un opérateur auti-adjoint et $\mathcal{F}$ est une isométrie, on conclut que A est auto-adjoint.

(ii) Nous allons utiliser le théorème de Hille–Yosida. Montrons que

$$\|R_\lambda(A)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \lambda^{-1} \quad \text{pour } \lambda > 0, \tag{5.9}$$

où $H = L^2(\mathbb{R}^d)$. On a

$$R_\lambda(A) = \mathcal{F}^{-1} M_{(\lambda + |\xi|^2)^{-1}} \mathcal{F} \quad \text{pour } \lambda > 0, \tag{5.10}$$

Il est évident que

$$\|M_{(\lambda+|\xi|^2)^{-1}} v\|_H \leq \lambda^{-1} \|v\|_H \quad \text{pour } \lambda > 0. \tag{5.11}$$

Comme $\mathcal{F}$ est une isométrie, la relation (5.10) et l'inégalité (5.11) impliquent (5.9).

D'après le théorème de Hille–Yosida, l'opérateur A est le générateur d'un semigroupe fortement continu $S(t)$. La fonction $u(t) = S(t)u_0$ appartient à l'espace $C^1(\mathbb{R}_+, H^2)$ et vérifie les équations (5.7), (5.8).

Montrons que la solution est unique. Si $v \in C(\mathbb{R}_+, H^2) \cap C^1(\mathbb{R}_+, L^2)$ est une autre solution, alors leure différence $w = u - v$ est solution du problème (5.7), (5.8) avec $u_0 = 0$. Il s'en suit que

$$\partial_t \|w\|^2 = 2(w, \partial_t w) = 2(w, \Delta w) \leq 0, \quad \|w(0)\|^2 = 0.$$

On conclut que $w \equiv 0$, et donc $u \equiv 0$. □

Exercice 5.10. Etudier le problème de Cauchy pour l'équation des ondes:

$$\begin{aligned} &\partial_t^2 u = \Delta u, && (t,x) \in \mathbb{R}^{d+1}, \\ &u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x), && x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

où $u_0 \in H^2$ et $u_0 \in H^1$.

Indication: Réécrire l'équation des ondes comme un système d'ordre 1 et utiliser le théorème de Hille-Yosida.

5.3.2 Equation de Schrödinger

Considérons le problème

$$\partial_t u = i\Delta u, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d, \tag{5.12}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d, \tag{5.13}$$

où $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^d)$ est une fonction donnée.

Théorème 5.11. *Pour tout donnée initiale $u_0 \in H^2$ il existe une unique fonction $u \in C(\mathbb{R}, H^2) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2)$ vérifiant les équations* (5.12), (5.13).

Démonstration. D'après le théorème 5.9, l'opérateur A est auto-adjoint. Le théorème de Stone implique que les opérateurs e^{itA} sont bien définis et forment un groupe unitaire fortement continu. Il s'ensuit que pour tout $u_0 \in H^2$ la fonction $u(t) = e^{itA}u_0$ est solution du problème (5.12), (5.13). La démonstration d'unicité est tout à fait analogue au cas de l'équation de la chaleur. □