6 Equations du première ordre

6.1 Equations linéaires

Considérons l'équation

$$\sum_{k=1}^{d} a_k(x)\partial_k u = b(x), \tag{6.1}$$

où $a_1, \dots, a_n, b$ sont des fonctions continûment différentiables sur $\mathbb{R}^d$. Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $u : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Définition 6.1. On dit que $u(x)$ est solution de l'équation (6.1) dans D si $u \in C^1(D)$, et (6.1) est vérifiée en tout point $x \in D$.

On associe à l'équation (6.1) le *système caractéristique*:

$$\dot{x} = a(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{6.2}$$

où $a = (a_1, \dots, a_d)$. Le lemme suivant montre le lien entre l'EDP (6.1) et le système d'EDO (6.2).

Lemme 6.2. *Soit $u(x)$ une solution de* (6.1) *dans un domaine D et $\gamma(t)$ une courbe intégrale de* (6.2) *définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ tel que $\gamma(t) \in D$ pour $t \in I$. Alors*

$$\frac{d}{dt}u(\gamma(t)) = b(\gamma(t)) \quad \textit{pour } t \in I.$$

Réciproquement, si cette relation a lieu au point $t = t_0$ pour une fonction $u(x)$ de classe C^1, alors l'équation (6.1) *est vérifiée au point $x = \gamma(t_0)$.*

Démonstration. La formule pour la dérivée d'une fonction composée implique

$$\frac{d}{dt}u(\gamma(t)) = \big(\nabla u(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\big) = \big(\nabla u(\gamma(t)), a(\gamma(t))\big). \tag{6.3}$$

On voit que u vérifie (6.1) au point $x = \gamma(t)$ si et seulement si le membre de droite dans (6.3) est égale à $b(\gamma(t))$. $\square$

Le lemme 6.2 donne une moyenne pour construire une solution du problème de Cauchy pour (6.1). Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ une surface régulière (de classe C^1) donnée par sa représentation paramétrique: $\Sigma = \{\sigma(y), y \in D_0\}$, où $D_0 \subset \mathbb{R}^{d-1}$ est un ouvert et $\sigma \in C^1(D_0, \mathbb{R}^d)$ est une fonction injective telle que les vecteurs $\partial_1\sigma(y), \dots, \partial_{d-1}\sigma(y)$ forment une famille libre pour tout $y \in D_0$. Considérons le problème de Cauchy pour (6.1):

$$u\big|_{\Sigma} = u_0, \tag{6.4}$$

où $u_0 \in C^1(\Sigma)$ est une fonction donnée.

Définition 6.3. Un point $x^0 \in \Sigma$ est dit *non caractéristique* si le vecteur $a(x^0)$ n'est pas tangent à Σ.

Le théorème suivant montre que le problème de Cauchy est bien posé dans un petit voisinage de tout point non caractéristique.

Théorème 6.4. *Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ une surface régulière, $x^0 \in \Sigma$ un point non caractéristique et $u_0 \in C^1(\Sigma)$ une fonction donnée. Alors il existe un ouvert $D \subset \mathbb{R}^d$ contenant le point x^0 et une unique fonction $u \in C^1(D)$ vérifiant l'équation* (6.1) *et la condition initiale* (6.4) *avec Σ remplacé par $\Sigma \cap D$.*

Démonstration. Soit $y^0 \in D_0$ tel que $\sigma(y^0) = x^0$. D'après le théorème d'existence et d'unicité de solution pour des EDO, il existe une boule ouverte $B_\varepsilon(y^0)$ et une constante $\tau > 0$ telles que pour tout $y \in B_\varepsilon(y^0)$ le système (6.2) possède une unique solution $x = \varphi(t, y)$, $|t| < \tau$, vérifiant la condition initiale $\varphi(0, y) = \sigma(y)$. De plus, $\varphi \in C^1\big(\,]-\tau, \tau[\, \times B_\varepsilon(y^0), \mathbb{R}^d\big)$ est un difféomorphisme sur son image D. On note $\psi : D \to]-\tau, \tau[\, \times B_\varepsilon(y^0)$ l'inverse de φ et définit $u \in C^1(D)$ par la formule

$$u(x) = u_0(\sigma(y)) + \int_0^t b(\varphi(s, y))\, ds,$$

où $(t, y) = \psi(x)$. Si $x = \sigma(y)$ avec $y \in B_\varepsilon(y^0)$, alors $\psi(x) = (0, y)$, et on voit que $u(x) = u_0(\sigma(y))$. En utilisant le lemme 6.2, on vérifie facilement que u est solution de l'équation (6.1) dans le domaine D. $\square$

6.2 Equations quasi-linéaires

Considérons l'équation

$$\sum_{k=1}^{d} a_k(x, u)\partial_k u = b(x, u), \tag{6.5}$$

où $a_1, \dots, a_n, b$ sont des fonctions continûment différentiables sur $\mathbb{R}^{d+1}$.

Définition 6.5. Une fonction $u(x)$ est dit *solution de l'équation* (6.5) *dans un domaine D* si $u \in C^1(D)$, et (6.5) est vérifiée en tout point $x \in D$.

On associe à l'équation (6.5) le *système caractéristique*:

$$\dot{x} = a(x, z), \quad \dot{z} = b(x, z), \quad (x, z) \in \mathbb{R}^{d+1}, \tag{6.6}$$

où $a = (a_1, \dots, a_d)$. Les courbes intégrales du système (6.6) sont appelées des *caractéristiques*. Soit $u \in C^1(D)$ une fonction et

$$\Gamma_u = \{(x, z) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in D, z = u(x)\}$$

son graphe. On dit que Γ_u *est composé de caractéristiques* si pour tout point $x_0 \in D$ la caractéristique $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ issue du point $(x_0, u(x_0))$ appartient à Γ_u tant que $x(t) \in D$. Le résultat suivant est l'analogue du lemme 6.2 pour des équations quasi-linéaires.

Lemme 6.6. *Soit* $D \subset \mathbb{R}^d$ *un domaine et* $u \in C^1(D)$. *Alors* $u(x)$ *est solution de l'équation* (6.5) *dans* D *si et seulement si son graphe est composé de caractéristiques.*

Démonstration. Supposons que Γ_u est composé de caractéristiques. On fixe $x_0 \in D$ et on note $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ la caractéristique issue du point $(x_0, u(x_0))$. Alors $z(t) = u(x(t))$. En dérivant cette relation, on obtient pour $t = 0$

$$\sum_{k=1}^{d} \partial_k u(x_0) \dot{x}_k(0) = \dot{z}(0).$$

Cette égalité est équivalent à l'équation (6.5) avec $x = x_0$.

Réciproquement, soit $u \in C^1(D)$ solution de l'équation (6.5) et $x_0 \in D$ un point. Soit $\tilde{x}(t)$ la solution de l'équation $\dot{x} = a(x, u(x))$ vérifiant la condition initiale $x(0) = x_0$. Alors la courbe $\big(\tilde{x}(t), u(\tilde{x}(t))\big)$ est une trajectoire du système caractéristique issue du point $(x_0, u(x_0))$. Par l'unicité, elle doit être confondue avec la caractéristique. On conclut que Γ_u est composé de caractéristiques. $\square$

On considère maintenant le problème de Cauchy pour (6.5). Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ une surface régulière et $u_0 \in C^1(\Sigma)$. On dit qu'un point $x^0 \in \Sigma$ est *non caractéristique* si le vecteur $a(x^0, u_0(x^0))$ n'est pas tangent à Σ.

Théorème 6.7. *Soit* $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ *une surface régulière,* $u_0 \in C^1(D)$ *une fonction donnée et* $x^0 \in \Sigma$ *un point non caractéristique. Alors il existe un ouvert* $D \subset \mathbb{R}^d$ *contenant le point* x^0 *et une unique fonction* $u \in C^1(D)$ *vérifiant l'équation* (6.5) *et la condition initiale* (6.4) *avec* Σ *remplacé par* $\Sigma \cap D$.

Démonstration. Soit $y^0 \in D_0$ un point tel que $\sigma(y^0) = x^0$. D'après le théorème d'existence and d'unicité pour les EDO, il existe une boule $B_\varepsilon(y^0) \subset D_0$ et une constante $\tau > 0$ telles que pour tout $y \in B_\varepsilon(y^0)$ le système (6.6) possède une unique solution $(\varphi(t, y), \zeta(t, y))$ définie pour $|t| < \tau$ et vérifiant la condition initiale

$$\varphi(0, y) = \sigma(y), \quad \zeta(0, y) = u_0(\sigma(y)).$$

Considérons l'équation $\varphi(t, y) = x$, où x appartient à un petit voisinage de x^0. Comme x^0 est un point non caractéristique de la surface $\Sigma = \{\sigma(y), y \in D_0\}$, les vecteurs $\partial_t \varphi(0, y^0), \partial_1 \varphi(0, y^0), \dots, \partial_{d-1} \varphi(0, y^0)$ sont linéairement indépendants. Donc, d'après le théorème d'inversion locale, il existe un petit voisinage $D \subset \mathbb{R}^d$ du point x^0 et une fonction $\psi : D \to]-\tau, \tau[\times B_\varepsilon(y^0)$ de classe C^1 telle que

$$\varphi(\psi(x)) = x \quad \text{pour } x \in D, \qquad \psi(\varphi(t, y)) = (t, y) \quad \text{pour } (t, y) \in \psi(D). \tag{6.7}$$

On définit une fonction $u \in C^1(D)$ par la relation

$$u(x) = \zeta(\psi(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad u(\varphi(t, y)) = \zeta(t, y). \tag{6.8}$$

Alors le graphe de $u(x)$ est composé de caractéristiques, et la restriction de u à $\Sigma \cap D$ est confondue avec u_0. Donc, la fonction $u(x)$ est solution du problème (6.5), (6.4). L'unicité de solution est conséquence immédiate du lemme 6.6. $\square$

Exercice 6.8. Soit $f, u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ des fonctions bornées. Etudier le problème

$$\partial_t u + f(u)\partial_x u = 0, \quad u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

6.3 Equation de Hamilton-Jacobi

Considérons l'équation non linéaire

$$H(x, \nabla u(x)) = 0, \tag{6.9}$$

où $x \in \mathbb{R}^d$, et $H \in C^2(\mathbb{R}^{2d})$ est une fonction donnée.

Définition 6.9. Une fonction $u(x)$ est dit *solution de l'équation* (6.9) *dans un domaine* D si $u \in C^2(D)$, et (6.9) est vérifiée pour tout $x \in D$.

On associe à l'équation (6.9) le *système caractéristique*:

$$\dot{x} = \nabla_p H(x,p), \quad \dot{p} = -\nabla_x H(x,p), \quad \dot{z} = \langle p, \nabla_p H(x,p)\rangle, \tag{6.10}$$

où $(x,p,z) \in \mathbb{R}^{2d+1}$. Remarquons que la fonction H est constante le long des solutions de (6.10). Les courbes intégrales $(x(t), p(t), z(t))$ pour lesquelles $H(x(t), p(t)) \equiv 0$ sont appellées des *caractéristiques*. Soit $u \in C^1(D)$ une fonction. On note

$$G_u = \{(x,p,z) \in \mathbb{R}^{2d+1} : x \in D, z = u(x), p = \nabla u(x)\}$$

le graphe de la fonction vectorielle $(u, \nabla u(x))$. On dit que G_u *est composé de caractéristiques* si pour tout point $x_0 \in D$ la caractéristique $\gamma(t) = (x(t), p(t), z(t))$ issue du point $(x_0, u(x_0), \nabla u(x_0))$ appartient à G_u tant que $x(t) \in D$. La démonstration du résultat suivant est similaire à celle du lemme 6.6.

Lemme 6.10. *Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un domaine et $u \in C^2(D)$ une fonction. Alors $u(x)$ est solution de l'équation* (6.9) *dans D si et seulement si le graphe G_u est composé de caractéristiques.*

Considérons maintenant le problème de Cauchy pour (6.9). Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ une surface régulière définie par une fonction $\sigma \in C^2(D_0, \mathbb{R}^d)$, où $D_0 \subset \mathbb{R}^{d-1}$ est un ouvert, et $u_0 \in C^2(\Sigma)$ une fonction donnée. On veut construire une solution de (6.9) vérifiant (6.4). Soit $\tilde{u}_0(y) = u_0(\sigma(y))$. Alors la condition initiale (6.4) est équivalente à l'équation $u(\sigma(y)) = \tilde{u}_0(y)$ pour $y \in D_0$. En dérivant cette égalité par rapport à y_k, on obtient

$$\langle \partial_k \sigma(y), p(y)\rangle = \partial_k \tilde{u}_0(y), \quad k = 1, \dots, d-1, \tag{6.11}$$

où $p(y) = (\nabla_x u)(y)$. On ajoute à (6.11) l'équation (6.9) avec $x = \sigma(y)$ et $\nabla u = p$:

$$H(\sigma(y), p(y)) = 0. \tag{6.12}$$

Soit $y^0 \in D_0$ un point tel que le système (6.11), (6.12) possède une solution $p_0 \in \mathbb{R}^d$. Supposons que les vecteurs $\partial_1\sigma(y^0), \dots, \partial_{d-1}\sigma(y^0), \nabla_p H(y^0, p_0)$ sont linéairement indépendants. Alors, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe une boule $B_\varepsilon(y^0)$ et une fonction $p^0 \in C^1(B_\varepsilon(y^0), \mathbb{R}^d)$ telles que $p^0(y^0) = p_0$, et les équations (6.11), (6.12) sont vérifiées pour $y \in B_\varepsilon(y^0)$.

Théorème 6.11. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe un ouvert $D \subset R^d$ contenant le point $x^0 = \sigma(y^0)$ et une fonction $u \in C^2(D)$ vérifiant l'équation* (6.9) *et la condition initiale* (6.4) *avec Σ remplacé par $\Sigma \cap D$.*

Démonstration. Comme dans le cas des équations quasi-linéaires, il existe des constantes positives ε et τ telles que, pour tout $y \in B_\varepsilon(y^0)$, le système (6.10) possède une unique solution $(\varphi(t,y), \zeta(t,y), \pi(t,y))$ définie pour $|t| < \tau$ et vérifiant les conditions initiales

$$x(0) = \sigma(y), \quad z(0) = u_0(\sigma(y)), \quad p(0) = p^0(y). \tag{6.13}$$

Le théorème des fonctions implicites implique qu'il existe un ouvert $D \subset \mathbb{R}^d$ contenant le point x^0 et une fonction $\psi \in C^2(D, B_\varepsilon(y^0) \times]-\tau, \tau[)$ tels que les relations (6.7) ont lieu. On définit une fonction $u \in C^1(D)$ par les égalités (6.8). Montrons que u est la solution cherchée. En effet, comme $\zeta(0,y) = u_0(\sigma(y))$ et $\varphi(0,y) = \sigma(y)$, on voit que la condition initiale (6.4) est satisfaite. Pour montrer que u est solution de l'équation (6.9), il suffit d'établir que $u \in C^2(D)$, et le graphe G_u est composé de caractéristiques. Ces propriétés sont conséquences de la relation

$$\nabla u(x) = \pi(\psi(x)) \quad \text{pour } x \in D. \tag{6.14}$$

On définit les fonctions

$$U_k(t,y) = \partial_k \zeta(t,y) - \langle \pi(t,y), \partial_k \varphi(t,y)\rangle, \quad V(t,y) = \partial_t \zeta(t,y) - \langle \pi(t,y), \partial_t \varphi(t,y)\rangle.$$

Il est facile à voir que (6.14) est équivalent à

$$U_k(t,y) = 0, \quad V(t,y) = 0 \quad \text{pour } (t,y) \in \psi(D),\ k = 1, \dots, d-1. \tag{6.15}$$

La relation $V \equiv 0$ coïncide avec la troisième équation de (6.10). Pour montrer que $U_k \equiv 0$, on dérive U_k en t, V en y_k, et on prend la différence :

$$\begin{aligned}
\partial_t U_k - \partial_k V &= -\langle \partial_t \pi(t,y), \partial_k \varphi(t,y)\rangle + \langle \partial_k \pi(t,y), \partial_t \varphi(t,y)\rangle \\
&= \langle (\nabla_x H)(\varphi, \pi), \partial_k \varphi(t,y)\rangle + \langle \partial_k \pi(t,y), (\nabla_p H)(\varphi, \pi)\rangle = 0,
\end{aligned}$$

où on a utilisé la fait que $H(\varphi, \pi) = 0$. Comme $V \equiv 0$ et $U_k(0,y) = 0$, on conclut que $U_k \equiv 0$. □

Exercice 6.12. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ une surface régulière convexe. Etudier le problème

$$|\nabla u(x)|^2 = 1, \quad u\big|_\Sigma = 0.$$

Pour une présentation plus détaillée des équations non linéaires, voir [Eva02].