1 Opérateurs bornés et équations différentielles dans un espace de Banach

Exercice 1.1. Soit H un espace de Hilbert séparable (réel ou complexe) et $\{e_j\}$ une base orthonormale de H. Etudier la convergence pour les topologies uniforme, forte ou faible des suites d'opérateurs suivantes :

$$A_n u = \sum_{j=n+1}^{\infty} (u, e_j) e_{j-n} \,, \tag{1.1}$$

$$B_n u = \sum_{j=1}^{\infty} (u, e_j) e_{j+n} \,, \tag{1.2}$$

$$C_n u = \sum_{j=n}^{\infty} (u, e_j) e_j \,. \tag{1.3}$$

Exercice 1.2. **(a)** Soit X un espace de Banach et $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Montrer que

$$\|AB\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X)} \|B\|_{\mathcal{L}(X)} \,. \tag{1.4}$$

En déduire que si $A_n \to A$ et $B_n \to B$, alors $A_n B_n \to AB$.

(b) Montrer que si $A_n \xrightarrow{s} A$ et $B_n \xrightarrow{s} B$, alors $A_n B_n \xrightarrow{s} AB$.

(c) Montrer que si $A_n \xrightarrow{w} A$ et $B_n \xrightarrow{s} B$, alors $A_n B_n \xrightarrow{w} AB$. Construire un exemple de suites $A_n, B_n \in \mathcal{L}(X)$ telles que

$$A_n \xrightarrow{s} 0, \quad B_n \xrightarrow{w} 0 \quad \text{quand } n \to \infty \,,$$

mais $A_n B_n$ ne converge pas vers 0 pour la topologie faible.

Exercice 1.3. Soit $J = [0, 1]$, $H = L^2(J; \mathbb{C})$ et $a \in C(J)$ une fonction réelle continue. On note A l'opérateur de multiplication par a. Montrer que $A^* = A$ et trouver $\sigma(A)$. Même question pour une fonction $a \in L^\infty(J)$.

Exercice 1.4. Soit H un espace de Hilbert réel séparable et $\{e_j\}$ une base orthonormale de H. Considérons l'opérateur

$$Au = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, e_j)\, e_j \,, \tag{1.5}$$

où $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}$ est une suite bornée telle que $\lambda_i \neq \lambda_j$. Décrire une représentation spectrale pour A.

Exercice 1.5. Soit X un espace de Banach et $A, B \in \mathcal{L}(X)$ deux opérateurs tels que $AB = BA$. Montrer que

$$e^{A+B} = e^A e^B \,. \tag{1.6}$$

La formule (1.6) est-elle vraie dans le cas général.

Exercice 1.6. Soit A un opérateur auto-adjoint borné dans un espace de Hilbert complexe. Montrer que l'opérateur $U(t) = e^{itA}$ est unitaire pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $U(t)^* = U(-t)$.

Exercice 1.7. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ un bloc de Jordan :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} .$$

Calculer e^{tA}.

Exercice 1.8. Soit X un espace de Banach, $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$ et $f \in C(\mathbb{R}, X)$. Démontrer l'existence et l'unicité de soluton pour le problème

$$\dot{x} = A(t)x + f(t)\,, \quad x(0) = x_0\,.$$