2 Opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert

Exercice 2.1. Soit $J = [0,1]$ l'espace de Sobolev d'ordre 1, c'est-à-dire, l'espace de fonctions $u \in L^2(J)$ représentable sous la forme

$$u(x) = u_0 + \int_0^x v(y)\,dy\,, \tag{2.1}$$

où $v \in L^2(J)$. Dans la suite, on note $v = u'$. On munit $H^1(J)$ du produit scalaire

$$(u_1,u_2)_{H^1} = \int_0^1 \big(u_1(x)\overline{u_2(x)} + u_1'(x)\overline{u_2'(x)}\big)\,dx\,,$$

On admet que $H^1(J)$ est un espace de Hilbert.

Considérons les deux opérateurs suivants dans $L^2(J)$:

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(A_1) = H^1(J), && A_1u(x) = u'(x) \quad \text{pour } u \in \mathcal{D}(A_1),\\ &\mathcal{D}(A_2) = \{u \in H^1(J) : u(0) = 0\}, && A_2u(x) = u'(x) \quad \text{pour } u \in \mathcal{D}(A_2). \end{aligned}$$

Montrer que :

(a) A_1, A_2 sont des opérateurs fermés ;

(b) $\sigma(A_1) = \mathbb{C}$, $\sigma(A_2) = \varnothing$.

Exercice 2.2. Soit H un espace de Hilbert séparable, $\{e_j\}$ une base orthonormale de H et $e \in H$ un vecteur qui n'appartient pas à l'espace vectoriel engendré par $\{e_j\}$. On définit un opérateur A par

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{u \in H : u = ce + \sum_{j=1}^N c_je_j, c, c_j \in \mathbb{C}, N \geq 0 \text{ est un entier}\Big\},$$

$$A\Big(ce + \sum_{j=1}^N c_je_j\Big) = ce.$$

Montrer que A n'est pas fermable.

Exercice 2.3. **(a)** Soit T l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ avec le domaine $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Trouver l'adjoint de T. L'opérateur T est-il essentiellement auto-adjoint?

(b) Soit $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$ et T_+ l'opérateur $i\frac{d}{dx}$ dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ avec le domaine $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$. Trouver l'adjoint de T_+. L'opérateur T_+ est-il essentiellement auto-adjoint?

Exercice 2.4. Soit $J = [0, 1]$ et $k \geq 1$ un entier. On définit l'espace de Sobolev $H^k(J)$ par récurrence : $H^1(J)$ est défini dans l'exercice 2.1,

$$H^k(J) = \{u \in H^{k-1}(J) : u' \in H^{k-1}(J)\}.$$

On muni $H^k(J)$ du produit scalaire

$$(u_1, u_2)_{H^k} = \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{k} u_1^{(j)}(x) \overline{u_2^{(j)}(x)} \right) dx \,.$$

On admet que $H^k = H^k(J)$ soit un espace de Hilbert. Soient

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &= \{u \in H^2 : u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0\}, \\ \mathcal{D}_{a,b} &= \{u \in H^2 : au(0) + u'(0) = 0 = bu(1) + u'(1)\}, \\ \mathcal{D}_\infty &= \{u \in H^2 : u(0) = u(1) = 0\}, \\ \mathcal{D} &= H^2. \end{aligned}$$

Soient $T_0, T_{a,b}, T_\infty, T$ l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ avec les domaines $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_{a,b}, \mathcal{D}_\infty, \mathcal{D}$.

(a) Montrer que les opérateurs $T_0, T_{a,b}, T_\infty, T$ sont fermés et que l'opérateur T_0 est symétrique, mais il n'est pas auto-adjoint. Trouver T_0^*.

(b) Montrer que $T_{a,b}, T_\infty$ sont des extensions auto-adjoint de T_0.

(c) Montrer que T_0 est semi-borné et trouver son extension de Friedrichs.

Exercice 2.5. Montrer que la forme quadratique

$$Q(u, v) = u(0)\overline{v(0)}, \quad u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

n'est pas engendrée par un opérateur symétrique.

Exercice 2.6. Soit $(M, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $a(m)$ une fonction mesurable à valeurs réelles. On définit un opérateur A dans $L^2(M, \mu)$ par

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in L^2(M, \mu) : au \in L^2(M, \mu)\}, \quad (Au)(m) = a(m)u(m).$$

Montrer que $A = A^*$ et trouver $\sigma(A)$.