3 Opérateurs auto-adjoints à spectre discret

Exercice 3.1. Soit A un opérateur borné dans un espace de Hilbert H. Montrer que $\overline{\operatorname{Im} A^*} = (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$.

Exercice 3.2. Soit $K \in \mathcal{L}(X, Y)$, où X, Y sont des espaces de Banach. Montrer que les deux propriétés suivantes sont equivalentes:

(a) Pour toute suite bornée $\{x_n\} \subset X$ la suite $\{Kx_n\}$ contient une sous-suite convergente.

(b) Pour tout ensemble borné $B \subset X$ l'ensemble $K(B)$ est relativement compact dans Y.

Dans ce cas, on dit que K est un opérateur compact.

Exercice 3.3. Soit X un espace de Banach.

(a) Montrer que si $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(X)$ sont compacts, alors $A_1 + A_2$ est compact.

(b) Montrer que si $A \in \mathcal{L}(X)$ est compact, alors pour tout $B \in \mathcal{L}(X)$ les opérateurs AB et BA sont compacts.

(c) Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Supposons qu'il existe $\lambda_0 \in \rho(A)$ tel que l'opérateur $R_{\lambda_0}(A)$ est compact. Montrer que $R_\lambda(A)$ est compact pour tout $\lambda \in \rho(A)$.

Exercice 3.4. Construire un opérateur A non nul dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = 0.$$

Exercice 3.5. Soit $I = [0, 1]$ et $p, q \in C^\infty(I)$ deux fonctions telles que

$$p(x) \geq c > 0 \quad \text{pour tout } x \in I.$$

On définit l'opérateur A par

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in C^\infty(I),\ u(0) = u(1) = 0\}, \quad Au = \frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{du}{dx}\Big) + q(x)u.$$

(a) Montrer que A est essentiellement auto-adjoint.

(b) Montrer que la résolvante $R_\lambda(\bar{A})$ est compacte pour $\lambda \geq \lambda_0 \gg 1$.

(c) Dans le cas $p \equiv 1$ et $q \equiv 0$, trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $\bar{A}$.