5 Groupe et semi-groupe d'opérateurs

Exercice 5.1. Soit $H = L^2(\mathbb{R})$ et $U(t)f(x) = f(t+x)$. Montrer que $U(t)$ est représentable sous la forme $U(t) = e^{itA}$, où A est un opérateur auto-adjoint dans H. Trouver A.

Exercice 5.2. Soit $U(t)$ un groupe unitaire dans un espace de Hilbert H tel que $U(1) = I$. Montrer que $U(t) = e^{itA}$, où A est un opérateur auto-adjoint dans H tel que $\sigma(A) \subset 2\pi Z$.

Exercice 5.3. Soit A un opérateur auto-adjoint. Montrer que $e^{itA} \to I$ quand $t \to 0$ pour la topologie uniforme si et seulement si $A \in \mathcal{L}(H)$.

Exercice 5.4. Soit $S_i(t)$, $i = 1, 2$, deux semigroupes avec des opérateurs infinitésimaux A_i. Montrer que $S_1 \equiv S_2$ si et seulement si $A_1 = A_2$.

Exercice 5.5. Soit A un opérateur (non borné) dans un espace de Hilbert H. On dit que A est *dissipatif* si

$$\mathrm{Re}(Au, u) \leq 0 \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}(A).$$

Soit $S(t)$, $t \geq 0$, un semigroupe tel que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1 \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Montrer que l'opérateur infinitésimal de S est dissipatif.

Exercice 5.6. Soit $X = L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty[$, et $S(t)$ une famille d'opérateurs définis par

$$S(t)f(x) = \frac{t}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y)}{y^2 + t^2} dy, \quad f \in X.$$

Montrer que $S(t)$ est un groupe fortement continu. On note A son opérateur infinitésimal. Montrer que $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(A)$ et décrire la restriction de A à $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

On définit les espaces $W^{k,p}(\mathbb{R})$ par récurrence :

$$W^{1,p}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}) : \text{il existe } g \in L^p(\mathbb{R}) \text{ tel que } f(x) = f_0 + \textstyle\int_0^x g(y)\, dy \right\},$$
$$W^{k,p}(\mathbb{R}) = \{ f \in W^{k-1,p}(\mathbb{R}) : f' \in W^{k-1,p}(\mathbb{R}) \}, \quad k \geq 2.$$

Exercice 5.7. Soit $X = L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty[$, et $S(t)$ une famille d'opérateurs définis par

$$S(t)f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{-y^2/4t} dy, \quad f \in X.$$

(a) Montrer que $S(t)$ est un semi-groupe fortement continu.

(b) Montrer que l'opérateur infinitésimal de A est donné par

$$\mathcal{D}(A) = W^{2,p}(\mathbb{R}), \quad Af = f''.$$

6 Equations du première ordre

Exercice 6.1. Considérons l'équation

$$\partial_t u + (b \cdot \nabla) u = f, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{6.1}$$

où $b \in \mathbb{R}^d$ et $f = f(t, x)$ est une fonction continûment différentiable.

(a) Trouver les caractéristiques pour l'équation (6.1).

(b) Donner une formule explicite pour la solution de l'équation (6.1) vérifiant la condition initiale

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{6.2}$$

où $g \in C^1(\mathbb{R})$ est une fonction donnée.

Exercice 6.2. Résoudre les équations linéaires suivantes:

$$x\partial_x u + y\partial_y u = 2u, \quad u(x,1) = g(x),$$
$$\partial_t u + x\partial_x u + 2y\partial_y u = 3u, \quad u(x,y,0) = g(x,y),$$

où $g \in C^1$ est une fonction donnée.

Exercice 6.3. Trouver toutes les solutions de l'équation $y\partial_x u = x\partial_y u$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6.4. Trouver toutes les solutions de l'équation $\sum_k x_k \partial_k u = 0$ définies sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 6.5. Considérons l'équation quasilinéaire

$$\partial_t u + u\partial_x u = f, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.3}$$

Trouver les solutions de l'équation (6.3) dans les cas suivants:

(a) $f \equiv 1$, $u(s, s) = \frac{1}{2}s$, $s \in \mathbb{R}$;

(b) $f = x$, $u(0, x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$;

(c) $f \equiv 0$, $u(0, x) = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$;

(d) $f = \sin x$, $u(0, x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.6. Trouver toutes les solutions du problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^d$:

$$|\nabla u(x)|^2 = |x|^2, \quad u\big|_{|x|=1} = C \in \mathbb{R}.$$