6 Equations du première ordre

Exercice 6.1. Considérons l'équation

$$\partial_t u + (b \cdot \nabla) u = f, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{6.1}$$

où $b \in \mathbb{R}^d$ et $f = f(t, x)$ est une fonction continûment différentiable.

(a) Trouver les caractéristiques pour l'équation (6.1).

(b) Donner une formule explicite pour la solution de l'équation (6.1) vérifiant la condition initiale

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{6.2}$$

où $g \in C^1(\mathbb{R})$ est une fonction donnée.

Exercice 6.2. Résoudre les équations linéaires suivantes:

$$x\partial_x u + y\partial_y u = 2u, \quad u(x, 1) = g(x),$$
$$\partial_t u + x\partial_x u + 2y\partial_y u = 3u, \quad u(x, y, 0) = g(x, y),$$

où $g \in C^1$ est une fonction donnée.

Exercice 6.3. Trouver toutes les solutions de l'équation $y\partial_x u = x\partial_y u$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6.4. Trouver toutes les solutions de l'équation $\sum_k x_k \partial_k u = 0$ définies sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 6.5. Considérons l'équation quasilinéaire

$$\partial_t u + u\partial_x u = f, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.3}$$

Trouver les solutions de l'équation (6.3) dans les cas suivants:

(a) $f \equiv 1$, $u(s, s) = \frac{1}{2}s$, $s \in \mathbb{R}$;

(b) $f = x$, $u(0, x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$;

(c) $f \equiv 0$, $u(0, x) = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$;

(d) $f = \sin x$, $u(0, x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.6. Trouver toutes les solutions du problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^d$:

$$|\nabla u(x)|^2 = |x|^2, \quad u\big|_{|x|=1} = C \in \mathbb{R}.$$